DANIEL C. IOAN
Universitatea “Politehnica” Bucureşti

BAZELE TEORETICE ALE INGINERIEI ELECTRICE

Editura
2000

DANIEL C. IOAN
BAZELE TEORETICE ALE INGINERIEI ELECTRICE

Referenţi ştiinţifici: Conf.dr.ing. Irina Munteanu
Ş.l. dr. ing. Gabriela Ciuprina

Editura, 2000
Bucureşti

Cuprins

Capitolul 0

Introducere

Disciplină “Bazele teoretice ale ingineriei electrice” analizează fenomenele electrice şi magnetice, folosind caracterizările lor cantitative, şi implicit modelarea matematica a acestor fenomene, in vederea aplicatiilor lor **tehnice**.

Ea are două mari subdiviziuni:

- Teoria câmpului electromagnetic
- Teoria circuitelor electrice

Teoria câmpului electromagnetic analizează fenomenele electromagnetice, în regimuri staţionare sau variabile, acordând o atentie deosebită repartiţiei spaţiale a acestor fenomene. Conceptul principal al acestei teorii este câmpul electromagnetic, caracterizat de vectori variabili în spaţiu şi eventual în timp, deci de funcţii vectoriale de mai multe variabile scalare.

Fenomenele electromagnetice sunt descrise în această teorie prin sisteme de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale, care se referă la componentele câmpurilor vectoriale.

În anumite ipoteze simplificatoare, sistemele fizice electromagnetice pot fi caracterizate printr-un număr finit de mărimi scalare variabile sau constante în timp. Teoria asociată acestor sisteme, numite circuite electrice, se bazează pe ecuaţii diferenţiale ordinare sau chiar algebrice, deci este mult mai simplă. Din acest motiv ea este intens folosită în practică.

Fenomenele electromagnetice se pot clasifica în:

- fenomene electrice;
- fenomene magnetice;
- fenomene galvanice,

corespunzând stărilor de electrizare, magnetizare, respectiv electrocinetică a corpurilor. Aceste fenomene au fost evidenţiate cu mai multe secole în urmă, dar

studiul lor sistematic a fost elaborat în secolul trecut. Legătura intimă între cele trei categorii de fenomene a fost pusă în evidenţă abia la sfârşitul secolului al XVIII - lea.

Fenomenele electrice au fost studiate sistematic de Coulomb folosind efectele mecanice ale acestora. S-a constatat că anumite corpuri îşi modifică starea prin frecare, fenomen numit de electrizare. Deoarece electrizarea poate fi de două tipuri (convenţional numită ”pozitivă”, respectiv ”negativă”), pentru caracterizarea stării de electrizare a unui corp s-a introdus o mărime fizică scalară (pozitivă sau negativă) notată cu q şi numită sarcină electrică.

Corpurile electrizate interacţionează mecanic. Asupra fiecărui corp dintr-o pereche de corpuri punctiformr electrizate se exercită forţe egale în modul dar de sens contrar, care sunt proporţionale cu sarcinile şi invers proporţionale cu pătratul distanţei dintre corpuri. S-a presupus, în mod greşit, că interacţiunea mecanică între cele două corpuri se realizează instantaneu, de la distanţă. Teoria acţiunii la distanţă a fost infirmată de teoria acţiunii prin contiguitate (“din aproape în aproape”), care are la bază ipoteza că fiecare corp electrizat determină în jurul său o modificare a stării materiei, numită câmp electric. Forţa care se exercită asupra celui de-al doilea corp fiind datorată interacţiunii acestuia cu câmpul electric produs de primul corp. Introducerea câmpului electric, ca element intermediar al interacţiunii între corpuri a reprezentat un mare progres în înţelegerea fenomenelor electromagnetismului. Câmpul electric este caracterizat de intensitatea sa $\mathbf{E}$, care este un vector proporţional cu forţa pe care acesta o exercită asupra unui mic corp electrizat pozitiv. S-a constatat că prezenţa corpurilor, chiar neelectrizate modifică intensitatea câmpului electric. Din acest motiv caracterizarea completă a câmpului electric în corpuri se realizează cu perechea de vectori: intensitatea $\mathbf{E}$ şi inducţia $\mathbf{D}$ a câmpului electric.

Aşa cum în mecanică, integrala forţei de-a lungul unui drum determină o mărime scalară importantă numită lucrul mecanic, în electromagnetism integrala intensităţii câmpului electric de-a lungul unei curbe determină tensiunea electrică u, mărime fizică scalară ce carcaterizează câmpul electric.

O altă categorie de fenomene studiată distinct de Volta, Galvani, Ohm şi Kirchhoff se referă la cele galvanice. Aceste fenomene apar în anumite sisteme de corpuri metalice puse în contact cu pilele şi acumulatoarele electrochimice şi au căpătat denumirea generică de ”curent electric”. S-au constatat experimental mai multe efecte ale curentului electric, dintre care menţionăm efectul termic, chimic, fiziologic şi cel mecanic, toate cu o multitudine de aplicaţii practice. Despre conductoarele parcurse de curent electric se spune că sunt în stare electrocinetică. Pentru caracterizarea globală a acestei stări s-a introdus mărimea fizică scalară, notată cu i şi numită intensitatea curentului electric. Local, starea electrocinetică este caracterizată de densitatea de curent $\mathbf{J}$.

Între starea electrocinetică şi cea electrostatică s-a stabilit o relaţie bazată pe observaţia că două corpuri electrizate diferit, unite printr-un corp metalic, aduc pentru scurt timp acest corp în stare electrocinetică. S-a tras concluzia

că starea electrocinetică reprezintă o deplasare a sarcinii electrice în interiorul corpului metalic, numit din aceste motive conductor. Curentul electric depinde proporţional de tensiunea u între extremităţile conductorului, dar şi de forma şi de materialul din care este confectionat conductorul. Relaţiile simple dintre tensiuni şi curenţi, valabile în regim staţionar şi determinate iniţial de Kirchhoff pe cale experimentală au fost ulterior extinse în cazul curenţilor variabili, constituind baza teoriei circuitelor electrice , o teorie aplicată intens şi în prezent atât pentru curenti slabi (electronică), cât şi pentru curenţi tari (electroenergetică).

Fenomenele magnetice au fost evidenţiate mai întâi prin interacţiunile de natură mecanică între corpuri aflate într-o anumită stare, numită de magnetizare. Aceste corpuri au fost numite magneti. Faptul că Pământul în ansamblul său este un magnet, şi-a găsit aplicţie la busola magnetică. Pentru explicarea corectă a interacţiunii prin contiguitate şi nu de la distanţă a fost necesară introducerea conceptului de câmp magnetic. Acesta este conceput ca o stare specială a materiei, capabilă să intermedieze acţiunile mecanice. Pentru caracterizarea locală a câmpului magnetic în corpuri sefoloseşte perechea de vectori: inducţie magnetică **B** şi intensitatea câmpului magentic **H**. S-a constatat că orice conductor parcurs de curent produce în jurul lui câmp magnetic. Mai mult s-a demonstrat că un magnet este echivalent cu un conductor înfăşurat parcurs de curent electric . Echivalenţa este valabilă atât din punctul de vedere al câmpului magnetic produs, cât şi din punctul de vedere al acţiunilor mecanice exercitate asupra corpului respectiv. În acest fel s-a evidenţiat legătura strânsă între starea electrocinetică şi cea magnetică.

Atât câmpul electric, cât şi cel magnetic sunt capabile să acumuleze energie, chiar şi în absenţa corpurilor.

Cercetările experimentale efectuate de Faraday care urmăreau validarea ipotezei greşite că şi câmpul magnetic este capabil să producă curent electric au condus la descoperirea unuia dintre fenomenele cele mai importante ale electromagnetismului, şi anume fenomenul de inducţie electromagnetică. Acestă constă în faptul că orice câmp magnetic variabil în timp produce (induce) câmp electric. Inducţia electromagentică are în prezent mai multe aplicaţii, dintre care menţionăm generatoarele de curent alternativ, care produc energia electrică în întreaga lume şi transformatoarele electrice, folosite printre altele la transportul acestei energii.

Ultimul fenomen fundamental al electromagnetismului a fost evidenţiat de Maxwell pe cale teoretică şi ulterior confirmat experimental de Hertz. Acestă constă în faptul că un câmp electric variabil în timp generează un cămp magnetic. Astfel s-a evidenţiat legătura intimă între componenta electrică şi cea magnetică a câmpului electromagnetic.

Faptul că cele două componente ale câmpului electromagnetic se generează reciproc, atunci când sunt variabile în timp a condus la explicaţia fenomenului de propagare a undelor electromagnetice, capabile să transporte energie inclusiv în vid.

Toate aceste fenomene au pus în evidenţă faptul că pe lângă substanţă, mai există o altă componentă a realităţii fizice numită câmp electromagnetic, câmp care intercţionează cu substanţa (este produs de corpuri şi modifică starea acestora), dar poate exista şi independent de acestea.

Capitolul 1

Mărimile fizice ale electromagnetismului

1.1 Mărimile fizice locale ale electromagnetismului

Pentru caracterizarea locală a câmpului electric se foloseşte o pereche de vectori:

- $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ - itensitatea câmpului electric
- $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ - inducţia electrică

Fiecare dintre aceştia sunt funcţie de punct (caracterizat de vectorul de poziţie $\mathbf{r}$) şi timpul t. Într-un sistem de coordonate cartezian vectorul de poziţie în spaţiul fizic este caracterizat de cele trei coordonate ale punctului:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{1.1}$$

iar fiecare vector de câmp are trei componente:

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{j}, \tag{1.2}$$

unde:

$$\begin{aligned} E_x &= E_x(x, y, z, t); \\ E_y &= E_y(x, y, z, t); \\ E_z &= E_z(x, y, z, t). \end{aligned} \tag{1.3}$$

În mod asemănător se exprimă şi:

$$\mathbf{D} = D_x\mathbf{i} + D_y\mathbf{j} + D_z\mathbf{k} \tag{1.4}$$

Pentru caracterizarea stării locale a câmpului magnetic se utilizează altă pereche de vectori tridimensionali:

- $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ - inducţia magnetică;
- $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ - intensitatea câmpului magnetic.

Câmpul electromagentic este o stare specială de existenţă a materiei, care poate exista şi în absenţa sustanţei (în vid), caracterizată prin vectoriii **E**, **D**, **B** şi **H**. Această stare este capabilă să exercite acţiuni ponderomotaore asupra corpurilor, să acumuleze şi să transporte energie.

Pentru a caracteriza modificarea stării corpurilor în urma interacţiunii cu câmpul electromagnetic se utilizeazaă o altă pereche de mărimi fizice locale:

- $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ - densitatea sarcinii electrice;
- $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ - densitatea curentului electric.

Prima este o mărime scalară (pozitivă sau negativă) ce carcaterizează local starea de electrizare, iar a doua este o mărime vectorială tridimensioanlă ce caracterizează local starea electrocinetică:

$$\mathbf{J} = J_x\mathbf{i} + J_y\mathbf{j} + J_z\mathbf{k} \tag{1.5}$$

În consecinţă, în fiecare punct din spaţiu pentru a caracteriza complet starea câmpului elctromagnetic şi a corpurilor din punct de vedere electromagnetic este nevoie de nu mai puţin de 16 mărimi scalare (componente ale celor patru vectori caracteristici câmpului, şi perechii scalar-vector ce caracterizează corpurile). Pentru a sintetiza această cantitate enormă de informaţie se introduc mărimile globale ale câmpului, respectiv ale corpurilor.

1.2 Mărimile fizice globale ale electromagnetismului

Mărimile globale ale câmpului se obţin prin integrarea mărimilor locale. Domeniul de integrare reprezintă o mulţime de puncte din spaţiul fizic. Se deosebesc trei tipuri de astfel de mulţimi numite varietăţi: curbe, suprafeţe şi domenii de volum nenul. Fiecare din mărimile locale se integrează pe o anumită varietate. Chiar dacă matematic fiecare mărime locală s-ar putea integra pe oricare din cele trei varietăţi, obţinându-se în final 18 mărimi, dintre acestea doar 6 au semnificaţie fizică. Ele sunt:

1. Tensiunea electrică:

$$u = \int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{dr}, \tag{1.6}$$

mărime fizică scalară obţinută prin integrarea intensităţii câmpului electric pe o curbă orientată;

2. Fluxul electric:
$$\psi = \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{dA}, \tag{1.7}$$
mărime fizică scalară obţinută prin integrarea inducţiei electrice pe o suptafaţă orientată;

3. Tensiunea magnetică:
$$u_m = \int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{dr}, \tag{1.8}$$
mărime fizică scalară obţinută prin integrarea intensităţii câmpului magnetic pe o curbă orientată;

4. Fluxul magnetic:
$$\varphi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dA}, \tag{1.9}$$
mărime fizică scalară obţinută prin integrarea inducţiei magnetice pe o suptafaţă orientată;

5. Sarcina electrică:
$$q = \int_D \rho dv, \tag{1.10}$$
mărime fizică scalară obţinută prin integrarea densităţii de sarcină pe un domeniu de volum nenul;

6. Intensitatea curentului electric:
$$i = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{dA}, \tag{1.11}$$
mărime fizică scalară obţinută prin integrarea densităţii de curent electrică pe o suprafaţă orientată.

În afară de sarcina electrică, toate celelalte mărimi sunt definite pe varietăţi orientate (curbe sau suprafeţe). Orientarea unei varietăţi se realizează convenţional, prin alegerea unui sens de referinţă. Pentru a asigura coerenţa internă a teoriei se adoptă următoarele reguli de orientare:

- suprafeţele închise se orientează din interior spre exterior;
- suprafeţele deschise se orientează în conformitate cu regula burghiului faţă de orientarea curbei pe care acestea se sprijină;
- curbele se orientează arbitrar, cu excepţia curbelor închise pe care se sprijină suprafeţe deschise orientate, caz în care seaplică regula anterioară .

Introducerea mărimilor globale, care toate sunt funcţii scalare de timp, asociate varietăţii pe care au fost definite, dar independente de punct, permite caracterizarea globală, în medie a câmpului electromagnetic pe mulţimea de puncte precizate. Aceasta simplifică mult caracterizarea câmpului electromagentic şi analiza lui.

Capitolul 2

Legile câmpului electromagnetic

Pentru înţelegerea profundă a fenomenelor specifice câmpului electromagnetic, acestea trebuie caracterizate nu numai calitativ ci şi cantitativ, prin intermediul ecuaţiilor între mărimile fizice caracteristice. Dintre mulţimea relaţiilor matematice între mărimile fizice, relaţii stabilite pe baza observaţiilor experimentale, s-a ales un număr redus de relaţii fundamentale, numite legi, care se bucură de propietăţile de independenţă, noncontradicţie şi completitudine.

Legile câmpului electromagnetic vor caracteriza fenomenele fundamentale ale electromagnetismului. Ele nu necesită demonstraţie matematică ci sunt obţinute printr-un proces de inducţie, pornind de la observaţii experimentale.

In continuare vor fi enunţate legile electromagnetismului, evidenţiindu-se semnificaţia lor fizică, dar fără a se prezenta argumentaţia care a condus la formularea lor.

2.1 Legea fluxului electric

Enunţul legii fluxului electric

Fluxul electric pe orice suprafaţă închisă Σ *este egal cu sarcina electrică din domeniul* D_Σ *mărginit de aceasta:*

$$\psi_\Sigma = q_{D_\Sigma} \tag{2.1}$$

sau explicit (fig. 2.1)

$$\oint_\Sigma \mathbf{D} = \int_{D_\Sigma} \rho dv. \tag{2.2}$$

Semnificaţia fizică a legii fluxului electric

Corpurile electrizate produc în jurul lor câmp electric.

Înconjurând un corp electrizat cu o suprafaţă închisă Σ, conform legii trebuie ca fluxul electric pe aceasta să fie nenul, ceea ce evidenţiază prezenţa câmpului electric.

Pentru a stabili forma şi orientarea liniilor de câmp electric se consideră două corpuri încărcate cu sarcini opuse (fig. 2.2). Pe o suprafaţă închisă Σ_1, care

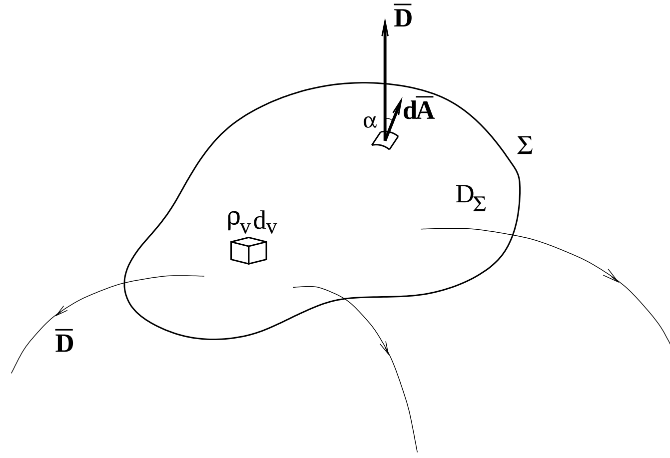


Figura 2.1: Referitoare la legea fluxului electric

înconjoară corpul cu sarcina $q_1 > 0$, fluxul electric este pozitiv ceea ce determină $D_{nmed} > 0$, deci liniile de câmp electric vor părăsi în medie această suprafaţă. Pe suprafaţa Σ_2 care înconjoară corpul cu sarcina $q_2 < 0$, fluxul este negativ, deci liniile de câmp electric vor intra în acest corp. În schimb, pe o suprafată Σ_3 în interiorul căreia sarcina este nulă, fluxul este tot nul. Pe o astfel de suprafată $D_{nmed} = 0$, deci liniile de câmp electric, care intră în Σ_3 trebuie să şi iasă, din aceasta.

Se constată că fluxul electric pe o suprafaţă închisă nu depinde de sarcina electrică din exteriorul suprafeţei.

În concluzie, se poate afirma că *liniile inducţiei electrice sunt curbe deschise care părăsesc sarcinile pozitive şi se îndreaptă spre cele negative, fiind continue în zonele neelectrizate.*

Forma locală a legii fluxului electric.

Aplicând relaţia Gauss-Ostrogradski, fluxul electric se exprimă ca:

$$\psi_\Sigma = \int_\Sigma \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int_{D_\Sigma} div \mathbf{D} dv = \int_{D_\Sigma} \rho dv. \tag{2.3}$$

Deoarece ultima egalitate este valabilă oricare ar fi domeniul D_Σ, rezultă că integranzii trebuie să fie egali:

$$div \mathbf{D} = \rho. \tag{2.4}$$

Această relaţie cunoscută sub numele de forma locală a legii fluxului electric este o ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale, liniară şi de ordinul întâ. Utilizând operatorul vectorial-diferenţial ∇, care într-un sistem de coordonate carteziene are forma:

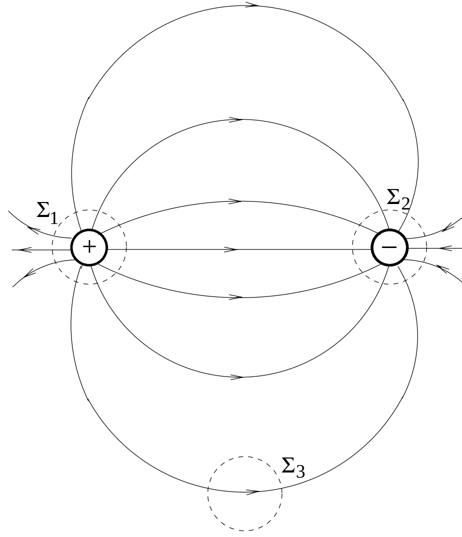


Figura 2.2: Spectrul câmpului electric

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{2.5}$$

forma locala a legii devine $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ sau explicit:

$$\frac{\partial Dx}{\partial x} + \frac{\partial Dy}{\partial y} + \frac{\partial Dz}{\partial z} = \rho \tag{2.6}$$

Ea este o ecuaţie diferenţiala care leagă componentele D_x, D_y şi D_z ale inducţiei din fiecare punct cu densitatea de sarcină din acel punct. Semnificaţia operatorului divergenţă este dată de faptul că acest scalar este proporţional cu “productivitatea în linii de câmp a unui punct”. În consecinţă, punctele electrizate pozitiv au divergenţa pozitivă a inducţiei şi sunt deci surse ale liniilor de câmp electric, cele negative “absorb” liniile de câmp, iar prin cele neelectrizate liniile de câmp trec în mod continuu. Pentru ca relaţia (2.6) să aibă loc în sens clasic este necesar ca inducţia electrică $\mathbf{D}$ să fie o funcţie derivabilă, iar sarcina electrică să fie distribuită exclusiv volumetric, cu valori mărginite ale densităţii de sarcină $\rho = \rho_v$.

Forma pe suprafeţe de discontinuitate a legii fluxului electric

Forma integrală (2.1) a fluxului electric are un caracter general presupunând doar integrabilitatea inducţiei electrice $\mathbf{D}$, pe când forma locală (2.6 poate fi aplicată doar în punctele în care inducţia $\mathbf{D}$ este continuă şi derivabilă spaţial. În practică se întâlnesc situaţii în care această condiţiie nu este îndeplinită, deci forma locală are un caracter particular. De exemplu, suprafaţa de separaţie între două medii omogene, cu proprietăţi diferite poate fi suprafaţă de discontinuitate pentru inducţia electrică. Din acest motiv este necesară stabilirea unei forme a

legii fluxului, aplicabilă pe astfel de suprafeţe. Se consideră două domenii $\mathcal{D}_1$ şi $\mathcal{D}_2$ separate prin suprafaţa de discontinuitate S_d, eventual electrizată superficial (fig 2.3) dar suficient de netedă pentru ca în fiecare punct să se poată defini o normală $\mathbf{n}_{12}$ unică.

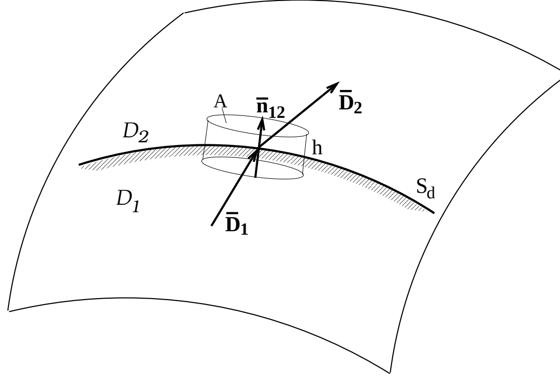


Figura 2.3: Suprafaţă de discontinuitate pentru câmpul electric

Atât în domeniul $\mathcal{D}_1$ cât şi în domeniul $\mathcal{D}_2$ se presupune că inducţia electrică are o variaţie spaţială continuă, astfel încât în orice punct $P_1 \in S_d$ se pot defini doi vectori $\mathbf{D}_1 = \lim_{P_1 \to P} \mathbf{D}(P_1)$ cu $P_1 \in \mathcal{D}_\infty$ si $\mathbf{D}_2 = \lim_{P_2 \to P} \mathbf{D}(P_2)$ cu $P_2 \in \mathcal{D}_\in$. Aplicând legea fluxului electric pe un cilindru Σ de înălţime h şi aria bazei A, ales astfel încât cele două baze să se afle în domenii diferite (fig. 2.3) se obţine:

$$\int_\Sigma \mathbf{D} d\mathbf{A} = \rho_{vmed} A h + \rho_{smed} A, \tag{2.7}$$

în care ρ_{vmed} este valoarea medie a densităţii de volum a sarcinii din interiorul cilindrului, iar ρ_{smed} este valoarea medie a densităţii de suprafaţă a sarcinii de pe aria A, a suprafeţei de discontinuitate. Fluxul electric:

$$\int_\Sigma \mathbf{D} d\mathbf{A} = (\mathbf{D}_{2med} - \mathbf{D}_{1med})\mathbf{n}_{12} A + D_{nmed} A_l. \tag{2.8}$$

se exprima în funcţie de componenta normală medie a inducţiei pe suprafaţa laterală ($D_{nmed} A_l$) şi de pe cele două baze ale cilindrului Σ.

Prin împărţire la A a relatiilor (2.7) şi (2.8) se obţine:

$$(\mathbf{D}_{2med} - \mathbf{D}_{1med})\mathbf{n}_{12} + D_{nmed} \frac{A_l}{A} = \rho_{vmed} h + \rho_{smed}, \tag{2.9}$$

relaţie care prin trecere la limită $h \to 0$ şi $A \to 0$ astfel încât A_l/A să tindă către zero devine:

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s. \tag{2.10}$$

Folosind notaţia:

$$div_s\mathbf{D} = \mathbf{n}_{12}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1). \tag{2.11}$$

relaţia 2.10 devine:

$$div_s\mathbf{D} = \rho_s, \tag{2.12}$$

cunoscută sub numele de forma locală a legii fluxului electricpe suprafeţe de discontinuitate.

În consecinţă la trecerea prin suprafaţa de discontinuitate, componenta normală a inducţiei electrice $D_n = \mathbf{nD}$ are un salt egal cu densitatea superficială de sarcină ρ_s din acel punct.

În cazul particular în care suprafaţa de discontinuitate S_d este neelectrizată superficial ($\rho_s = 0$):

$$div_s\mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{n}_{12}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0, \tag{2.13}$$

componenta normală a inducţiei electrice se conservă la trecerea prin această suprafaţă ($D_{n1} = D_{n2}$).

Aplicaţie

Inducţia electrică produsă de o sferă uniform electrizată.

Se consideră o sferă omogenă de raza a, plasată în vid şi încărcată uniform cu sarcină având densitatea de volum ρ_v (fig. 2.4)

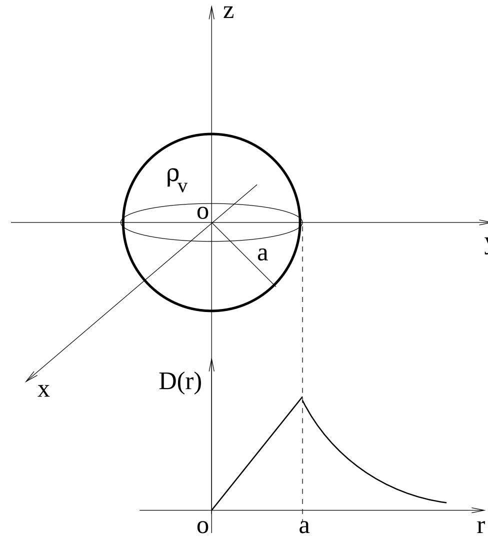


Figura 2.4: Sfera electrizată

Din considerente de simetrie, liniile de câmp electric, care părăsesc sfera pentru $\rho_v > 0$ trebuie să fie orientate radial. Pentru calculul inducţiei electrice

într-un punct situat la distanţa $r < a$ de centrul sferei se consideră o suprafaţă sferică Σ, de raza r_0 pe care se aplică legea fluxului electric (2.1), in care:

$$\psi_\Sigma = \int_\Sigma \mathbf{D}d\mathbf{A} = \int_\Sigma DdA = D\int_\Sigma dA = 4\pi r^2 D, \tag{2.14}$$

$$q_{D_\Sigma} = \int_{D_\Sigma} \rho dv = \int_{D_\Sigma} \rho_v dv = \rho_v \int_{D_\Sigma} dv = \rho_v \frac{4\pi r^3}{3}, \tag{2.15}$$

deci modulul inducţiei electrice are expresia $D = \rho_v r/3$.

În cazul în care $r > a$, fluxul electric are aceeaşi expresie, dar sarcina electrică este

$$q_{D_\Sigma} = \int_{D_\Sigma} \rho dv = \int_{D_a} \rho_v dv = \rho_v \frac{4\pi a^3}{3} = q, \tag{2.16}$$

în care s-a notat cu D_a domeniul sferei de rază a, a cărui sarcină este q. Aplicând din nou legea fluxului electric rezultă expresia inducţiei în afara sferei electrizate $D = \rho_v a^3/3r^2$

Deoarece inducţia este orientată radial rezultă că $\mathbf{D} = D\mathbf{r}/r$, deci

$$\mathbf{D}(r) = \begin{cases} \rho_v \mathbf{r}/3 &= q\mathbf{r}/4\pi a^3 \quad pentru \quad r \le a; \\ \rho_v a^3 \mathbf{r}/3r^3 &= q\mathbf{r}/4\pi r^3 \quad pentru \quad r > a. \end{cases}$$

.

Se constată că in centrul sferei câmpul este nul, inducţia elctrică având o variaţie liniară după rază în interiorul sferei. Câmpul este maxim la suprafaţa sferei, iar în exteriorul ei inducţia scade invers proporţional cu pătratul distanţei r faţă de centrul sferei. Dacă sfera este electrizată pozitiv, atunci liniile de câmp sunt drepte care pornesc din interiorul sferei şi sunt orientate radial spre infinit, unde se presupune că se află sarcina negativă "pereche". În cazul sferei electrizate negativ, liniile de câmp sunt orientate invers.

Dacă sfera de rază a este electrizată cu sarcina q distribuită uniform nu volumetric ci superficial, atunci inducţia exterioară are aceeaşi expresie $D = q/4\pi r^2$, independentă de raza sferei. În schimb în interior ea este nulă. În acord cu forma locală a legii fluxului electric, inducţia are un salt la suprafaţa sferei, salt egal cu $\rho_s = q/4\pi a^2$.

2.2 Legea fluxului magnetic

Enunţul legii fluxului magnetic

Fluxul magnetic pe orice suprafaţă închisă Σ este nul:

$$\varphi_\Sigma = 0, \tag{2.17}$$

sau explicit (fig. 2.5)

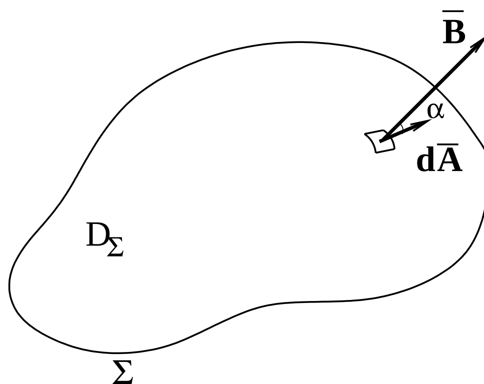


Figura 2.5: Referitoare la legea fluxului magnetic

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0. \tag{2.18}$$

Semnificaţie fizică a legii fluxului magnetic

Dacă se compară legea fluxului magnetic cu cea a fluxului electric, rezultă *că nu există sarcini magnetice*, similare celor electrice, capabile să fie surse pozitive sau negative ale câmpului magnetic.

În consecinţă, liniile inducţiei magnetice nu pot avea puncte din care să izvorască sau în care să se concentreze, ceea ce face ca liniile câmpului magnetic să nu poată fi curbe deschise cu puncte iniţiale sau finale. Liniile inducţiei magnetice sunt curbe continui, închise.

Liniile de câmp magnetic care intră într-o parte a unei suprafeţe închise trebuie să părăsească suprafaţa prin cealaltă parte a ei.

Forma locală a legii fluxului magnetic

Aplicând relaţia Gauss-Ostrogradski, fluxul magnetic de pe o suprafaţă închisă se exprimă ca:

$$\varphi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{B} d\mathbf{A} = \int_{D_{\Sigma}} div \mathbf{D} dv = 0. \tag{2.19}$$

Deoarece ultima egalitate este valabilă pentru orice domeniu D_{Σ}, rezultă

$$div \mathbf{B} = 0, \tag{2.20}$$

ecuaţie care reprezintă forma locala a legii fluxului magnetic.

Relaţia 2.20 evidenţiază faptul că prin orice punct din spaţiu, liniile inducţiei magnetice trec continuu, fără să apară sau să dispară.

Într-un sistem de coordonate carteziene relaţia 2.20 devine,

$$div \mathbf{B} = \nabla \mathbf{B} = \frac{\partial Bx}{\partial x} + \frac{\partial By}{\partial y} + \frac{\partial Bz}{\partial z} = 0, \tag{2.21}$$

ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale, liniare de ordinul întâi satisfăcută de componentele inducîei magnetice în orice punct din spaţiu şi la orice moment de timp.

Forma pe suprafeţe de discontinuitate a legii fluxului magnetic

Se consideră două domenii $\mathcal{D}_1$ şi $\mathcal{D}_2$ separate prin suprafaţa de discontinuitate S_d (fig 2.6) suficient de netedă pentru ca în orice punct al ei să se poată defini normala unică $\mathbf{n_{12}}$. Considerând inducţia mgnetică un câmp vectorial continuu în fiecare din cele două domenii, se pot defini în fiecare punct al suprafeţei S_d o pereche de vectori $\mathbf{B}_1$ şi $\mathbf{B}_2$, ca limite ale inducţiei către acel punct venind din domeniul $\mathcal{D}_1$, respectiv din $\mathcal{D}_2$.

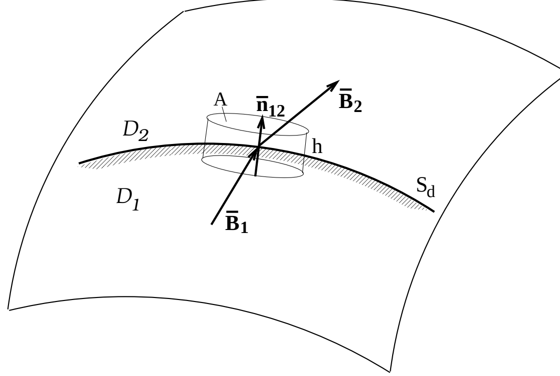


Figura 2.6: Suprafaţă de discontinuitate pentru câmpul magnetic

Aplicând legea fluxului magnetic pe un cilindru Σ cu arie laterală A_l şi aria bazei A, plasat ca în figura 2.6 se obţine

$$\int_{\Sigma} \mathbf{B} d\mathbf{A} = (\mathbf{B}_{2_{med}} - \mathbf{B}_{1_{med}})\mathbf{n}_{12} A + \mathbf{B}_{n_{med}} A_l = 0, \qquad (2.22)$$

sau după împărţire la A:

$$(\mathbf{B}_{2_{med}} - \mathbf{B}_{1_{med}})\mathbf{n}_{12} + \mathbf{B}_{n_{med}} \frac{A_l}{A} = 0, \qquad (2.23)$$

relaţie care tinde către

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \qquad (2.24)$$

dacă A şi A_l tind către zero astfel incât A_l/A să tindă către zero.

Folosind notaţia $div_s\mathbf{B} = \mathbf{n}_{12}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)$, rezultă *forma pe suprafeţe de discontinuitate a legii fluxului magnetic:*

$$div_s\mathbf{B} = 0, \qquad (2.25)$$

care evidenţiază conservarea componentelor normale ale inducţiei magnetice ($B_{n1} = B_{n2}$) la trecerea printr-o suprafaţă de discontinuitate.

2.3 Legea inducţiei electromagnetice

Fenomenul de inducţie electromagnetică, descoperit de Farraday în 1831 reprezintă unul din fenomenele fundamentale ale electromagnetismului, pe care se bazează multe din aplicaţiile actuale ale electronicii, electrotehnicii şi electroenergeticii. În esenţă, acest fenomen constă în producerea câmpului electric, ca urmare a variaţiei în timp a câmpului magnetic. Legea care descrie acest fenomen este legea inducţiei electromagnetice, care are următorul **enunţ**.

Tensiunea electrică pe orice curbă închisă Γ *este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic de pe orice suprafaţă* S_Γ*, care se sprijină pe curba* Γ*:*

$$u_\Gamma = -\frac{\varphi_{S_\Gamma}}{dt}, \tag{2.26}$$

sau explicit (fig. 2.7)

$$\oint_\Gamma \mathbf{E}\, d\mathbf{r} = -\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}} \int_{\mathbf{S}_\Gamma} \mathbf{B}\, \mathbf{dA} \tag{2.27}$$

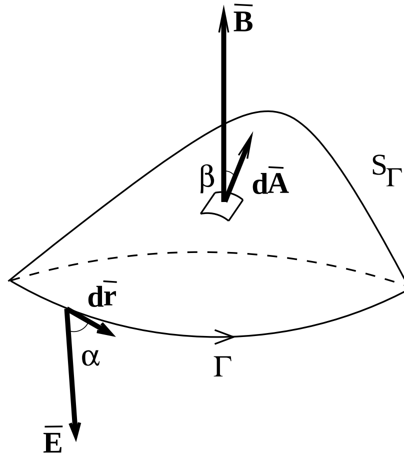


Figura 2.7: Referitoare la legea inducţiei electromagnetice

În teoria Maxwell-Hertz, atât punctele curbei Γ cât şi cele ale suprafeţei S_Γ se consideră antrenate de corpuri în mişcarea lor.

Semnificaţia fizică a legii inducţiei electromagnetice

Variaţia în timp a fluxului magnetic pe o suprafaţă atrage după sine apariţia unei tensiuni electrice nenule pe curba ce mărgineşte suprafaţa respectivă, ceea ce indică apariţia unui câmp electric in zona acestei curbe. În consecinţă, *câmpul magnetic variabil determină apariţia unui câmp electric* numit câmp indus.

Inducţia electromagnetică se poate datora variaţiei inducţiei magnetice în timp $\mathbf{B}(t)$ sau mişcării corpurilor într-un câmp magnetic cu inducţie $\mathbf{B}$ eventual constantă în timp. Primul tip de inducţie se numeşte "de transformare", iar al doilea se numeşte "de mişcare".

Forma locală a legii inducţiei electromagnetice

Pentru a stabili o formă locală a legii este necesară efectuarea unei derivate de flux de tipul:

$$\frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma} \mathbf{G}\,\mathbf{dA} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\int_{\mathbf{S_\Gamma(t)}} \mathbf{G(t)}\,\mathbf{dA} \tag{2.28}$$

în care atât integrantul G(t), cât şi domeniul de integrare $S_\Gamma(t)$ sunt funcţii de timp. O astfel de derivată se poate separa în doi termeni:

$$\frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma(t)} \mathbf{G(t)}\,\mathbf{dA} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\int_{\mathbf{S_\Gamma}} \mathbf{G(t)}\,\mathbf{dA} + \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\int_{\mathbf{S_\Gamma(t)}} \mathbf{G}\,\mathbf{dA} \tag{2.29}$$

urmând ca în primul termen S_Γ să se considere invariant în timp iar în al doilea termen $\mathbf{G}$ să se considere constant în timp. Dacă domeniul de integrare nu variază în timp, se poate scrie:

$$\frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma} \mathbf{G}\,\mathbf{dA} = \int_{\mathbf{S_\Gamma}} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{t}}\,\mathbf{dA}. \tag{2.30}$$

Pentru a calcula cel de al doilea termen din 2.29 se consideră două momente succesive de timp t şi $t+\Delta t$, în care domeniul de integrare este $S_\Gamma = S_\Gamma(t)$ şi respectiv $S'_\Gamma = S_\Gamma(t+\Delta t)$. Pe suprafaţa închisă $\Sigma = S_\Gamma \cup S'_\Gamma \cup S_l$ formată din S_Γ, S'_Γ şi suprafaţa laterală S_l, generată de mişcarea curbei Γ în intervalul Δt (fig. 2.8), fluxul vectorului $\mathbf{G}$ este:

$$\int_\Sigma \mathbf{G}\,\mathbf{dA'} = -\int_{\mathbf{S_\Gamma}} \mathbf{G}\,\mathbf{dA} + \int_{\mathbf{S'_\Gamma}} \mathbf{G}\,\mathbf{dA'} + \int_{\mathbf{S_l}} \mathbf{G}\,\mathbf{dA'}. \tag{2.31}$$

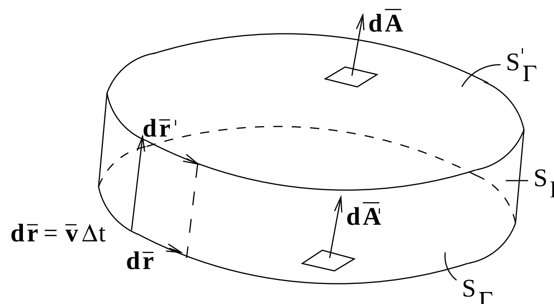


Figura 2.8: Referitoare la densitatea de flux

Semnul minus al primului termen se datoreşte faptului că elementul de arie $d\mathbf{A} = -\mathbf{dA'}$ este orientat spre interiorul şi nu spre exteriorul suprafeţei închise Σ.

Fluxul de pe suprafaţa închisă Σ se exprimă folosind relaţia Gauss - Ostrogradski:

$$\int_\Sigma \mathbf{G}\,\mathbf{dA'} = \int_{\mathbf{D_\Sigma}} \mathbf{div\,G\,dv} = \mathbf{\Delta t}\int_{\mathbf{S_\Gamma}} \mathbf{v\,div\,G\,dA}, \tag{2.32}$$

în care elementul de volum se exprimă ca $dv = d\mathbf{A}\mathbf{ds} = \mathbf{v}\mathbf{dA}\mathbf{\Delta t}$, iar fluxul de pe suprafaţa laterală S_l este:

$$\int_{S_l} \mathbf{G}\,\mathbf{d\prime A} = \mathbf{\Delta t}\int_{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{G}\,(\mathbf{dr}\times\mathbf{v}), \tag{2.33}$$

deoarece $d\prime\mathbf{A} = \mathbf{dr}\times\mathbf{s} = \mathbf{\Delta t}(\mathbf{dr}\times\mathbf{v})$.

În consecinţă,

$$\frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma(t)} \mathbf{G}\,\mathbf{dA} = \lim_{\mathbf{\Delta t}\to\mathbf{0}}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\Delta t}}\left[\int_{\prime\mathbf{S_\Gamma}} \mathbf{G}\,\mathbf{d\prime A} - \int_{\mathbf{S_\Gamma}} \mathbf{G}\,\mathbf{dA}\right] = \int_{\mathbf{S_\Gamma}} \mathbf{v}\,\mathbf{div}\,\mathbf{G}\,\mathbf{dA} - \int_{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{G}\,(\mathbf{dr}\times\mathbf{v}) \tag{2.34}$$

şi aplicând relaţia lui Stokes:

$$\int_\Gamma \mathbf{G}\,(\mathbf{dr}\times\mathbf{v}) = -\int_{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{G}\,(\mathbf{v}\times\mathbf{dr}) = -\int_{\mathbf{\Gamma}} (\mathbf{G}\times\mathbf{v})\mathbf{dr} = -\int_{\mathbf{S_\Gamma}} \mathbf{rot}\,(\mathbf{G}\times\mathbf{v})\mathbf{dA} \tag{2.35}$$

rezultă:

$$\frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma(t)} \mathbf{G}\,\mathbf{dA} = \int_{\mathbf{S_\Gamma}} [\mathbf{v}\,\mathbf{div}\,\mathbf{G} + \mathbf{rot}\,(\mathbf{G}\times\mathbf{v})]\,\mathbf{dA}. \tag{2.36}$$

În consecinţă, derivata de flux are expresia:

$$\frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma} \mathbf{G}\,\mathbf{dA} = \int_{\mathbf{S_\Gamma}} \left[\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{t}} + \mathbf{v}\mathbf{div}\,\mathbf{G} + \mathbf{rot}\,(\mathbf{G}\times\mathbf{v})\right]\mathbf{dA} = \int_{\mathbf{S_\Gamma}} \frac{\mathbf{d_f G}}{\mathbf{dt}}\mathbf{dA}, \tag{2.37}$$

în care s-a folosit notaţia:

$$\frac{d_f\mathbf{G}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial t} + \mathbf{v}\mathbf{div}\,\mathbf{G} + \mathbf{rot}\,(\mathbf{G}\times\mathbf{v}). \tag{2.38}$$

Aplicând această dezvoltare în cazul legii inducţiei electromagnetice, rezultă conform relaţiei lui Stokes:

$$\int_\Gamma \mathbf{E}\,d\mathbf{r} = \int_{S_\Gamma} rot\,\mathbf{E}\,d\mathbf{A} = -\int_{S_\Gamma} \frac{d_f\mathbf{B}}{dt}d\mathbf{A} \tag{2.39}$$

deci

$$rot\mathbf{E} = -\frac{d_f\mathbf{B}}{dt} \tag{2.40}$$

în care $\frac{d_f\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\mathbf{t}} + \mathbf{v}\mathbf{div}\,\mathbf{B} + \mathbf{rot}\,(\mathbf{B}\times\mathbf{v}) = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\mathbf{t}} + \mathbf{rot}\,(\mathbf{B}\times\mathbf{v})$, deoarece conform legii fluxului magnetic $div\mathbf{B} = 0$.

Relaţia obţinută:

$$rot\,\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - rot\,(\mathbf{B}\times\mathbf{v}) \tag{2.41}$$

poartă numele de *forma locală a legii inducţiei electromagnetice.*

Prin integrarea acestei relaţii pe o suprafaţă deschisă S_Γ se obţine *forma integrală dezvoltată a legii inducţiei electromagnetice*:

$$\int_\Gamma \mathbf{E}\, d\mathbf{r} = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{A} - \int_\Gamma (\mathbf{B} \times \mathbf{v})\, \mathbf{dr} \tag{2.42}$$

Se constată că tensiunea electrică indusă pe orice curbă închisă se separă în două părţi, $u_\Gamma = u_1 + u_2$, prima datorată variaţiei propriu-zise a inducţiei magnetice în timp, numită *tensiune indusă prin transformare*:

$$u_1 = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, d\mathbf{A}, \tag{2.43}$$

iar a doua datorată deplasării curbei Γ:

$$u_2 = -\int_\Gamma (\mathbf{B} \times \mathbf{v})\, \mathbf{dr}, \tag{2.44}$$

numită *tensiune indusă prin mişcare*.

Forma locală a legii reprezintă o ecuaţie diferenţială vectorială liniară cu derivate parţiale de ordinul întâi, care prin proiecţie pe axe determină un sistem de trei ecuaţii diferenţiale scalare.

În cazul particular al mediilor imobile (v=0) legea inducţiei electromagnetice are următoarea formă locală:

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.45}$$

cunoscută sub numele de *a doua ecuaţie a lui Maxwell*.

În cazul coordonatelor carteziene operatorul rotor admite dezvoltarea:

$$rot\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}, \tag{2.46}$$

deci cele trei ecuatii cu derivate partiale devin:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

În general, rotorul unui câmp vectorial $\mathbf{E}$ este un nou câmp vectorial, definit prin:

$$rot\, \mathbf{E} = \mathbf{n} \lim_{\mathbf{A_{S_\Gamma}} \to \mathbf{0}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{A_{S_\Gamma}}} \int_\mathbf{\Gamma} \mathbf{E}\, \mathbf{dr} \tag{2.47}$$

în care versorul $\mathbf{n}$ reprezintă acea orientare a ariei $\mathbf{A}_{S_\Gamma} = \mathbf{n}\mathbf{A_{S_\Gamma}}$, care asigură valoarea maximă pentru $\mathbf{n}\, \mathbf{rot}\, \mathbf{E}$.

Semnificaţia operatorului rotor este dată de faptul că aplicat câmpului de viteze al unui fluid determină un vector proporţional cu viteza unghiulară a unui mic corp antrenat de fluid. În consecinţă, ele reprezintă tendinţa de rotaţie a liniilor de câmp.

Forme pe suprafeţe de discontinuitate a legii inductiei

Se consideră două medii $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ separate prin suprafaţa S_d (fig. 2.9) astfel încât în orice punct al acesteia există o normală unică $\mathbf{n}_{12}$. Atât în domeniul $\mathcal{D}_1$, cât şi în domeniul $\mathcal{D}_2$, se presupune că intensitatea câmpului electric are variaţie spaţială continuă, astfel încât în orice punct $P \in S_d$ se pot defini doi vectori $\mathbf{E}_1 = \lim_{P_1 \to P} \mathbf{E}(P_1)$, cu $P_1 \in D_1$ şi $\mathbf{E}_2 = \lim_{P_2 \to P} \mathbf{E}(P_2)$ cu $P_2 \in D_2$. În mod asemănător se definesc $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{v_1}$ şi $\mathbf{v_2}$, care reprezintă inducţiile magnetice şi respectiv vitezele pe cele două feţe ale suprafeţei S_d.Aplicând pe o curbă închisă Γ, de forma unui dreptunghi cu laturile s şi h, cuprins în planul normalei $\mathbf{n}_{12}$ legea inducţiei în formă integrală dezvoltată 2.42 se obţine:

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\,\mathbf{dr} = -\int_{\mathbf{S_\Gamma}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{t}} \mathbf{dA}, \tag{2.48}$$

în care s-a notat $\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathbf{B} \times \mathbf{v}$.

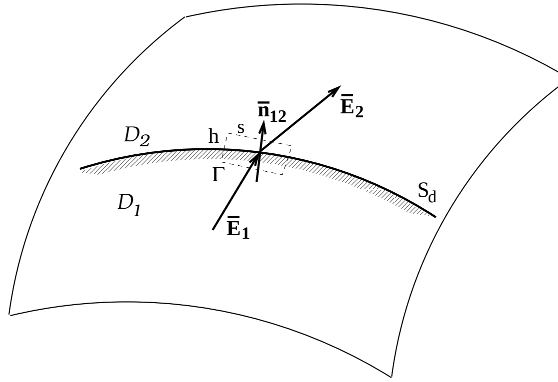


Figura 2.9: Suprafaţa de discontinuitate pentru campul electric

Notând cu $B_{n\,med}$ componenta normală a inducţiei magnetice mediată pe suprafaţa S_Γ se constată că integrala:

$$\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{B_{nmed}}}{\partial \mathbf{t}} \mathbf{hs} \tag{2.49}$$

tinde către zero atunci când $h \to 0$ sau $s \to 0$. Integrala pe curba Γ este:

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\,\mathbf{dr} = -\mathbf{F_{1\,med}} \mathbf{ts} + \mathbf{F_{2\,med}} \mathbf{ts} + \mathbf{h}(\mathbf{F_a} + \mathbf{F_b})_{\mathbf{med}}, \tag{2.50}$$

în care s-a notat cu $\mathbf{t}$ versorul tangent la suprafaţa de discontinuitate cuprins în planul S_Γ, iar cu $\mathbf{F}_a$ şi $\mathbf{F}_b$ componentele vectorului $\mathbf{F}$ tangenţiale la cele două laturi de lungime h ale dreptunghiului Γ.

După împărţire la s se obţine relaţia:

$$(\mathbf{F}_{2\,med} - \mathbf{F}_{1\,med})\mathbf{t} + \frac{h}{s}(\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b)_{med} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{n\,med}}{\partial t}h \tag{2.51}$$

care tinde către:

$$(\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1)\mathbf{t} = 0, \tag{2.52}$$

dacă $h \to 0$ şi $s \to 0$ astfel încât $h/s \to 0$. Deoarece egalitatea $\mathbf{F}_1\mathbf{t} = \mathbf{F}_2\mathbf{t}$ se păstrează pentru orice orientare a tangentei $\mathbf{t}$ la S_d, rezultă că are loc conservarea componentei tangenţiale a vectorului $\mathbf{F} = \mathbf{E}+\mathbf{B}\times\mathbf{v}$ la trecerea printr-o suprafaţă de discontinuitate.

Prin proiectarea vectorului $\mathbf{F}$ pe direcţia normalei şi pe planul tangenţial la S_d se obţine descompunerea $\mathbf{F} = (\mathbf{nF})\mathbf{A} + (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) \times \mathbf{n}$ care permite scrierea relaţiei de conservare sub forma: $\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1) = 0$.

Folosind notaţia:

$$rot_s\mathbf{F} = \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1), \tag{2.53}$$

legea inducţiei electromagnetice capătă următoarea *formă pe suprafeţele de discontinuitate*:

$$rot_s(\mathbf{E} + \mathbf{B} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}. \tag{2.54}$$

În cazul particular al mediilor imobile:

$$rot_s\mathbf{E} = 0, \tag{2.55}$$

ceea ce evidenţiază conservarea componentei tangenţiale a intensităţii câmpului electric ($\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{E} = \mathbf{n}_{12} \times \mathbf{E}$) la trecerea prin orice suprafaţă de discontinuitate.

Observaţii privind legea inducţiei

a) Separarea tensiunii electrice induse în doi termeni unul de transformare şi altul de mişcare *este convenţională*, fiind relativă la sistemul de referinţă ales, în schimb suma lor este invariantă la referenţialul ales. Tensiunea electrică într-o spiră conductoare închisă indusă de un magnet permanent vecin este aceeaşi indiferent dacă spira se deplasează spre magnet sau magnetul spre spiră. Folosind referenţialul laboratorului, în primul caz inducţia este de mişcare iar în al doilea caz ea este de transformare dar prin folosirea unui refereţial ataşat corpului mobil interpretările se inversează.

b) În cazul în care corpurile se deplasează de-a lungul liniilor de cămp $\mathbf{B}\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$, rezultă că tensiunea indusă prin mişcare este nulă. Din acest motiv se spune că fenomenul de inducţie prin mişcare are loc atunci *când corpurile taie liniile de câmp* în mişcarea lor.

c) *Liniile de câmp electric indus sunt curbe închise*, orientate asfel încât sa înconjoare liniile câmpului magnetic variabil în timp care le-a produs

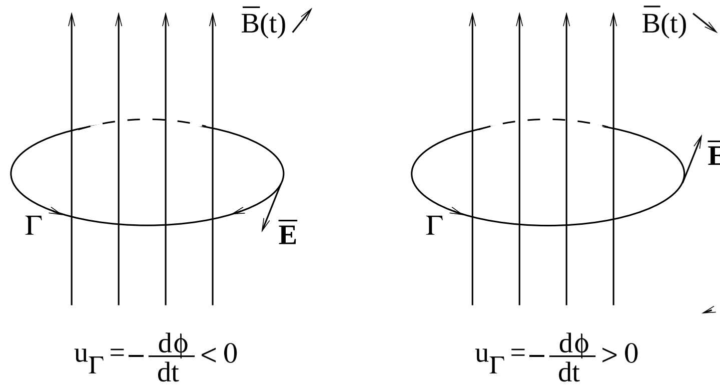


Figura 2.10: Sensul câmpului electric indus

Sensul câmpului electric indus depinde nu numai de sensul câmpului magnetic dar şi de modul în care variază acesta în timp (fig. 2.10).

Teorema potenţialului electric staţionar.

În regim staţionar corpurile sunt imobile (v=0), iar mărimile câmpului electromagnetic sunt constante în timp. În acest caz legea inducţiei electromagnetice degenerează în:

$$u_\Gamma = 0\,, \quad \oint_\Gamma \mathbf{E}\,d\mathbf{r} = 0 \tag{2.56}$$

relaţie cunoscută sub numele de *teorema potenţialului electric staţionar*, care se enunţă astfel: *tensiunea electrică pe orice curbă închisă este nulă în regim staţionar*.

În cazul regimului stationar liniile câmpului electric nu pot fi curbe închise deoarece altfel ar contrazice relatia 2.56.

Forma locală a teoremei potenţialului vector:

$$rot\mathbf{E} = 0 \tag{2.57}$$

justifică numele ei. Intensitatea câmpului electric având un caracter irotaţional rezultă că ea poate fi reprezentată printr-un *potenţial electric scalar V*, astfel încât:

$$\mathbf{E} = -grad\,V. \tag{2.58}$$

Într-un sistem de coordonate carteziene această relaţie se exprimă ca:

$$\mathbf{E} = -grad\,V = -\nabla\,V = -\left(\mathbf{i}, \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j}, \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \tag{2.59}$$

Această expresie este justificată de faptul că rotorul oricărui gradient este nul:

$$rot\,\mathbf{E} = -rot(grad\,V) = -\nabla \times (\nabla\,V) = 0. \tag{2.60}$$

Gradientul unui câmp scalar V este un câmp scalar definit în general prin:

$$grad\, V = \lim_{v_{D_\Sigma} \to 0} \frac{1}{v_{D_\Sigma}} \int_\Sigma V\, d\mathbf{A} \tag{2.61}$$

în care v_{D_Σ} este volumul domeniului D_Σ.

Gradientul unui câmp scalar este un vector care indică direcţia şi sensul în care câmpul are variaţia cea mai rapidă, modulul gradientului indicând "viteza de variaţie spaţială" a câmpului scalar.

Se constată că toţi cei trei operatori de derivare spaţială *rot*, *div* şi *grad* se pot exprima folosind operatorul vectorial-diferenţial ∇, aplicat în produs vectorial, produs scalar şi respectiv produsul cu un scalar.

O altă formă echivalentă a teoremei potenţialului electric se poate exprima astfel: *tensiunea electrică între două puncte în regim staţionar nu depinde de drumul ales, ci doar de punctele extreme.*

Pentru demonstrarea acestei afirmaţii se consideră două curbe C_1 şi C_2 care unesc punctele A si B:

$$u_1 = \int_{C_1} \mathbf{E}\, d\mathbf{r}_1\,,\;\; u_2 = \int_{C_2} \mathbf{E}\, d\mathbf{r}_2 \tag{2.62}$$

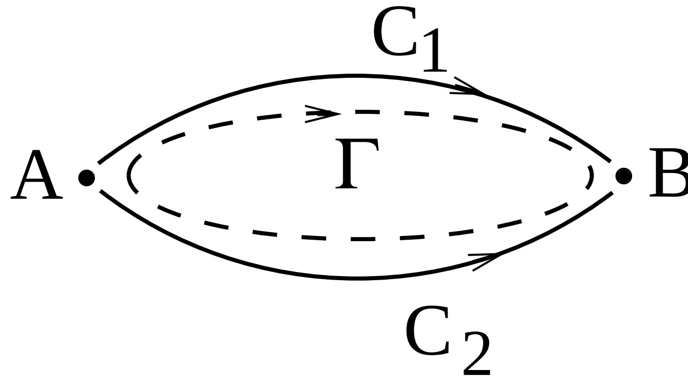


Figura 2.11: Independenţa tensiunii de drum

şi curba închisă $\Gamma = C_1 \cup C_2$ (fig. 2.11) pe care

$$u_\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{E}\, d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{E}\, d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{E}\, d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{E}\, d\mathbf{r}_1 - \int_{C_2} \mathbf{E}\, d\mathbf{r}_2 = u_1 - u_2 = 0, \tag{2.63}$$

deci

$$u_1 = u_2. \tag{2.64}$$

Această formulare permite determinarea potenţialului electric al unui punct ca fiind tensiunea electrică de la acel punct la un punct de referinţă, la care se

presupune în mod convenţional potenţialul nul:

$$V(P) = \int_{C_{PP_0}} \mathbf{E}\, d\mathbf{r}, \tag{2.65}$$

integrala fiind dependentă doar de punctul P, dar nu şi de curba C care leagă punctul P de P_0(2.12).

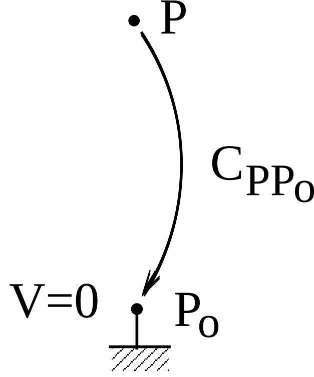


Figura 2.12: Calculul potenţialului

Această definiţie este în concordanţă cu relaţia $\mathbf{E} = -grad\, V$, deoarece:

$$\begin{aligned} \int_{C_{PP_0}} \mathbf{E}\, d\mathbf{r} &= -\int_{C_{PP_0}} grad\, V\, d\mathbf{r} = -\int_{C_{PP_0}} \frac{\partial V}{\partial x}\, dx + \frac{\partial V}{\partial y}\, dy \frac{\partial V}{\partial z}\, dz = \\ &= -\int_{C_{PP_0}} dV = V(P) - V(P_0) = V(P). \end{aligned} \tag{2.66}$$

Potenţialul electric este definit până la o constantă aditivă C deoarece $grad\,(V + C) = grad\, V$, fixarea acesteia fiind echivalentă cu alegerea punctului de referinţă în care potenţialul este convenţional nul.

Relaţia 2.65 permite calculul potenţialului electric pornind de la intensitatea câmpului, prin integrarea cesteia, pa când relaţia 2.58 asigură operaţia inversă de calcul al câmpului pornind de la potenţial, prin derivare.

Potenţialului scalar V simplifică reprezentarea câmpului electric deoarece se utilizează în acest sens o funcţie scalară şi nu una vectorială de punct, iar tensiunea poate fi calculată nu printr-o integrală ci printr-o operaţie algebrică: tensiunea electrică între două puncte fiind egală cu potenţialul punctului iniţial minus potenţialul punctului final:

$$u_{AB} = V_A - V_B \tag{2.67}$$

Pentru demonstarea acestei afirmaţii se calculează tensiunea pe un drum care trece prin punctul de referinţă O(fig. 2.13).

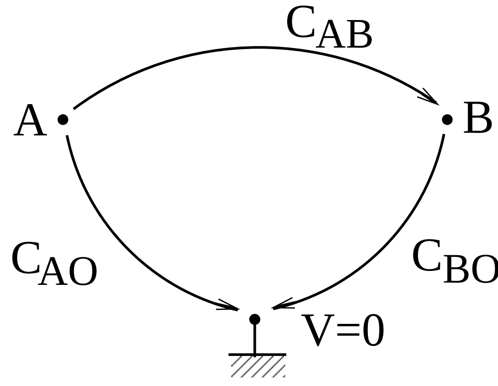


Figura 2.13: Tensiunea electrică în regim staţionar

$$u_{AB} = \int_{C_{AB}} \mathbf{E}\, d\mathbf{r} = \int_{C_{A0}\cup C_{0B}} \mathbf{E}\, d\mathbf{r} = \int_{C_{A0}} \mathbf{E}\, d\mathbf{r} - \int_{C_{0B}} \mathbf{E}\, d\mathbf{r} = V_A - V_B. \quad (2.68)$$

Trebuie remarcat că oricare din relaţiile echivalente 2.56, 2.57, 2.58, 2.64, 2.65 şi 2.67 este îndreptăţită să fie forma matematică a teoremei poteţialului electrostatic.

Aplicaţii ale legii inducţiei electromagnetice

- [1.] **Tensiunea indusă prin transformare**.

  Se consideră un câmp magnetic uniform, variabil sinusoidal în timp:

  $$\mathbf{B}(t) = \mathbf{k}\mathbf{B_0} \sin(\omega \mathbf{t}) \quad (2.69)$$

  iar într-un plan perpendicular pe direcţia acestuia o spiră circulară de rază a (fig. 2.14).

  Tensiunea indusă în spiră este:

  $$u_\Gamma = -\frac{d\varphi_{S_\Gamma}}{dt} = -\pi a^2 B_0\, \omega \cos(\omega t). \quad (2.70)$$

  Se constată că valoarea efectivă a tensiunii induse este cu atât mai mare cu cât frecvenţa câmpului este mai ridicată ceea ce justifică afirmaţia că fenomenul de inducţie este favorizat de frecvenţele înalte.

- [2.] **Tensiunea indusă prin mişcare**

  Se consideră un câmp magnetic uniform şi constant în timp **B** în care se roteşte un cadru dreptunghiular cu viteza unghiulară ω, în jurul propriei sale axe plasată perpendicular pe câmp (fig. 2.15).

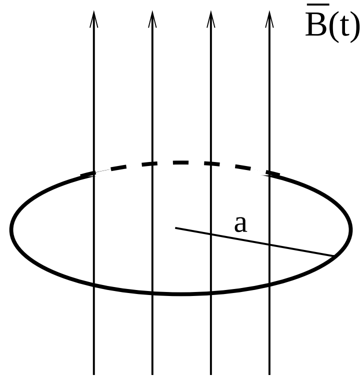


Figura 2.14: Tensiune indusă prin transformare

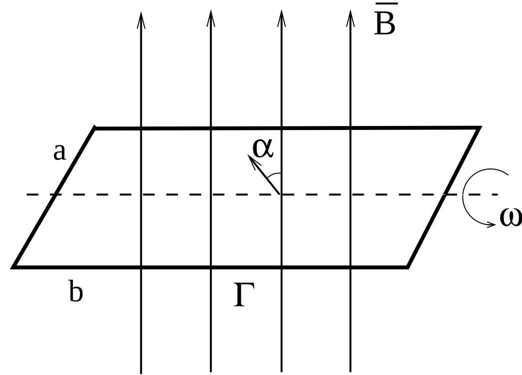


Figura 2.15: Tensiune indusă prin mişcare

Fluxul magnetic de pe suprafaţa cadrului:

$$\varphi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{B}\, d\mathbf{A} = BA\cos(\omega t) \tag{2.71}$$

este varibil în timp, ceea ce determină inducerea unei tensiuni electrice în cadru:

$$u_\Gamma = -\frac{d\varphi_{S_\Gamma}}{dt} = +BA\omega\sin(\omega t). \tag{2.72}$$

Valoarea efectivă acestei tensiuni este cu atât mai ridicată cu cât viteza unghiulară a cadrului este mai mare.

Tensiunea indusă poate fi calculată şi cu ajutorul relaţiei integrale dezvoltate:

$$u_\Gamma = -\int_\Gamma (\mathbf{B} \times \mathbf{v})\, \mathbf{dr} = \mathbf{2B}\,\omega\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}\mathbf{b}\sin(\omega\mathbf{t}), \tag{2.73}$$

ţinând cont că integrantul este nenul doar pe cele două laturi de lungime b ale dreptunghiului, pe care $v = \omega a/2$.

2.4 Legea circuitului magnetic

Enunţ legii

Tensiunea magnetică pe orice curbă închisă Γ *este egală cu suma dintre intensitatea curentului electric ce străbate orice suprafaţă* S_Γ*, care se sprijină pe curba* Γ*, plus viteza de variaţie a fluxului electric pe acea suprafaţă*:

$$u_{m_\Gamma} = i_{S_\Gamma} + \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt}, \tag{2.74}$$

sau explicit (figura 2.16)

$$\oint_\Gamma \mathbf{H} d\mathbf{r} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J} d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma} \mathbf{D} d\mathbf{A}. \tag{2.75}$$

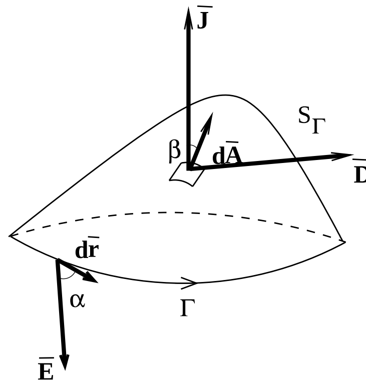


Figura 2.16: Referitoare la legea circuitului magnetic

În teoria Maxwell-Hertz, atât punctele curbei Γ cât şi cele ale suprafeţei S_Γ se consideră antrenate de corpuri în mişcarea lor.

Semnificaţia fizică a legii circuitului magnetic

Prin cei doi termeni din membrul drept ai relaţiei 2.74, legea pune în evidenţă două cauze distincte ale câmpului magnetic şi anume curentul electric şi variaţia în timp a câmpului electric. Deoarece produce acelaşi efect magnetic ca şi curentul de conducţie, viteza de variaţie a fluxului electric este cunoscută sub numele de intensitate a curentului de deplasare, nume dat de Maxwell. Curentul de deplasare se poate datora pe de o parte variaţiei propriu zise a inducţiei electrice în timp (efect evidenţiat de Maxwell pe argumente teoretice obţinute în urma studiului câmpului electromagnetic în medii imobile) sau pe de altă parte el se poate datora deplasării corpurilor în câmp electric (efect evidenţiat de Hertz).

În vecinătatea oricărui conductor aflat în stare electrocinetică apare un câmp magnetic produs de curentul electric ce străbate conductorul. Liniile câmpului

magnetic sunt curbe închise care înconjoară curentul electric ce le produce. Sensul lor se determină cu regula burghiului drept faţă de sensul curentului.

Considerând în jurul unui conductor parcurs de curent un cerc orientat după regula burghiului rezultă aplicând legea circuitului magnetic că $U_{m_\Gamma} = H_{t_med} 2\pi r > 0$, deci că intensitatea câmpului magnetic are o componentă tangenţială cu medie pozitivă ceea ce justifică orientarea liniei de câmp.

Câmpul electric variabil în timp produce în mod asemănător un câmp magnetic ale cărui linii de câmp sunt curbe închise ce înconjoară liniile câmpului electric. La stabilirea sensului liniilor câmpului magnetic se ia în considerare nu numai sensul liniilor de câmp electric dar şi felul în care acesta variază în timp, deoarece semnul curentului de deplasare depinde derivata funcţie de timp a fluxului electric.

Dacă D(t) este funcţie crescătoare, atunci câmpul magnetic are sensul dat de regula burghiului drept, în schimb el are sens contrar în czul în care D(t) scade în timp.

Forma locală a legii circuitului magnetic.

Ca ş în cazul legii inducţiei electromagnetice pentru obţinerea formei locale a legii este necesară efectuarea unei derivate de flux de tipul:

$$\frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma(t)} \mathbf{D}(t)d\mathbf{A} = \frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma} \mathbf{D}(t)d\mathbf{A} + \frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma(t)} \mathbf{D}d\mathbf{A}, \tag{2.76}$$

în care primul termen reprezintă intensitatea curentului maxwellian de deplasare, iar al doilea reprezintă intensitatea curentului hertzian de deplasare.

Folosind expresia derivatei de flux (2.37) obţinută în paragraful 2.3 se obţine:

$$\frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma} \mathbf{D}d\mathbf{A} = \int_{S_\Gamma} \frac{d_1\mathbf{D}}{dt}d\mathbf{A} = \int_{S_\Gamma} \left[\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{v}div\mathbf{D} + rot\left(\mathbf{D}\times\mathbf{v}\right)\right] d\mathbf{A}. \tag{2.77}$$

Transformând expresia tensiunii magnetice prin relaţia lui Stokes rezultă egalitatea:

$$\int \mathbf{H}d\mathbf{r} \int_{\mathbf{S_\Gamma}} \mathbf{rotHdA} = \int_{\mathbf{S_\Gamma}} \left[\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{t}} + \mathbf{vdivD} + \mathbf{rot}\left(\mathbf{D}\times\mathbf{v}\right)\right] \mathbf{dA}, \tag{2.78}$$

valabilă pentru orice suprafaţă S_Γ. În consecinţă, luând în considerare forma locală a legii fluxului electric ($div\mathbf{D} = \rho$), rezultă relaţia:

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho\mathbf{v} + rot\left(\mathbf{D}\times\mathbf{v}\right), \tag{2.79}$$

care este forma locală a legii circuitului magnetic.

Această relaţie evidenţiază din punct de vedere local patru vectori distincţi, surse ale câmpului magnetic:

- $\mathbf{J}$ – densitatea curentului electric de conducţie;

- $\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ – densitatea curentului electric de deplasare, datorat variaţiei propriuzise a inducţiei electrice în timp);
- $\mathbf{J}_v = \rho \mathbf{v}$ – densitatea curentului electric de convecţie, datorat deplasării corpurilor electrizate, şi
- $\mathbf{J}_R = rot\,(\mathbf{D} \times \mathbf{v})$ – densitatea curentului Röntgen, datorat rotirii corpurilor polarizate.

Cei patru vectori au aceiaşi unitate de măsură şi sunt echivalenţi din punctul de vedere al efectului lor magnetic. Ultimii trei alcătuiesc curentul de deplasare global

$$\mathbf{J}_d g = \mathbf{J}_d + \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_R = \frac{d_f \mathbf{D}}{dt},$$

alcătuit din curentul de deplasare maxwellian ($\mathbf{J}_d$) şi din cel hertzian ($\mathbf{J}_v + \mathbf{J}_R$). Prin integrare se obţin:

- $i_{S_\Gamma} \int_{S_\Gamma} \mathbf{J} d\mathbf{A}$ – intensitatea curentului de conducţie;
- $i_{d_{S_\Gamma}} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J}_d d\mathbf{A} = \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{A}$ – intensitatea curentului de deplasare;
- $i_{v_{S_\Gamma}} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J}_V d\mathbf{A} = \int_{S_\Gamma} \rho \mathbf{v} d\mathbf{A}$ – intensitatea curentului de convecţie;
- $i_{R_{S_\Gamma}} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J}_R d\mathbf{A} = \int_{S_\Gamma} rot\,(\mathbf{D} \times \mathbf{v})\, d\mathbf{A} = \int_\Gamma (\mathbf{D} \times \mathbf{v})\, d\mathbf{r}$ – intensitatea curentului Röntgen.

Aceste patru mărimi scalare permit scrierea legii în următoarea formă integrală dezvoltată:

$$u_{m_\Gamma} = i_{S_\Gamma} + i_{d_{S_\Gamma}} + i_{v_{S_\Gamma}} + i_{R_{S_\Gamma}}. \tag{2.80}$$

În cazul particular al mediilor imobile ($v = 0$), legea circuitului magnetic are următoarea formă locală:

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{2.81}$$

cunoscută sub numele de prima ecuaţie a lui Maxwell. Exprimând rotorul intensităţii câmpului magnetic în coordonate carteziene:

$$rot\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \tag{2.82}$$

rezultă următoarea formă locală a legii circuitului magnetic, exprimată sub forma a trei ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale, scalare, liniare şi de ordinul întâi:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y + \frac{\partial D_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z + \frac{\partial D_z}{\partial t} \end{cases} \tag{2.83}$$

Aceste ecuaţii leagă cele trei componente ale intensităţii câmpului magnetic produs de mărimile caracteristice surselor acestuia: densitatea de curent de conducţie şi cea de deplasare.

Forma pe suprafeţe de discontinuitate a legii circuitului magnetic. Se consideră două medii $\mathcal{D}_1$ şi $\mathcal{D}_2$, în care mărimile caracteristice câmpului electromagnetic sunt funcţii continue de spaţiu. Presupunem că acestea sunt separate printr-o suprafaţă de discontinuitate S_d suficient de netedă, astfel încât în orice punct $P \in S_d$ există o normală unică $\mathbf{n}_{12}$ (figura 2.17).

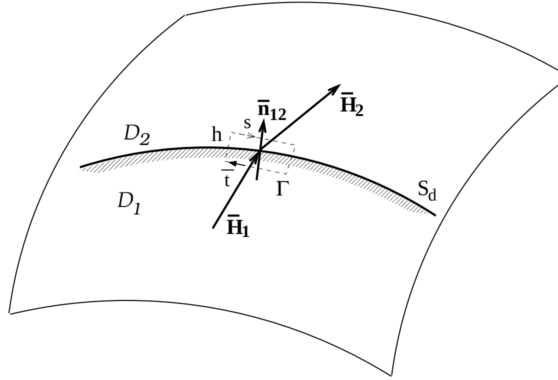


Figura 2.17: Suprafaţa de discontinuitate

În fiecare punct $P \in S_d$ se pot defini limitele dinspre domeniul $\mathcal{D}_1$ şi respectiv dinspre domeniul $\mathcal{D}_2$ ale mărimilor:

$\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ – intensitatea câmpului magnetic;

$\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ – inducţia electrică;

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ – vitezele locale ale celor două medii.

Se consideră că suprafaţa de discontinuitate S_d este parcursă de o pânză de curent, caracterizată de densitatea $\mathbf{J}_s$ şi că unul din cele două domenii este electrizat superficial cu densităţile de sarcină ρ_s urmând ca acesta să aibă viteza locală $\mathbf{v}$.

Pentru a demonstra forma locală a legii se consideră o curbă închisă Γ de forma unui dreptunghi situat în planul normalei $\mathbf{n}_{12}$ şi al cărui centru este punctul $P \in S_d$, pe care se aplică forma globală dezvoltată a legii circuitului magnetic sub forma:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{G} d\mathbf{r} = \int_{S_\Gamma} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \right) d\mathbf{A} \tag{2.84}$$

unde $\mathbf{G} = \mathbf{H} - \mathbf{D} \times \mathbf{v}$. Integrala lui $\mathbf{G}$ este:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{G} d\mathbf{r} = (\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1)\, \mathbf{t} s + h t_{nd} G_{tnd} \tag{2.85}$$

iar integrala pe suprafaţa dreptunghiului este:

$$\left[\mathbf{J}_{med} + \frac{\partial \mathbf{D}_{med}}{\partial t} + (\rho \mathbf{v}_{med})\right] hs\mathbf{n} + \left[\mathbf{J}_S \mathbf{n}_{12} + \rho_S \mathbf{v}\right]_{med} \mathbf{n}S, \tag{2.86}$$

deci

$$(\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1)_{med}\, \mathbf{t} + \frac{h}{s} G = s\left[J_{nmed} + \frac{\partial D_{nmed}}{\partial t} + (\rho_v \mathbf{v})_{med}\right] + \mathbf{n}\left(\mathbf{J}_S + \rho_{S_2}\mathbf{v}_2 - \rho_{S_1}\mathbf{v}_1\right), \tag{2.87}$$

unde $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{12} \times \mathbf{t}$ este normala la S_Γ. Dacă h şi S tind către zero astfel încât $W_S \to 0$ rezultă:

$$(\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1)\, \mathbf{t} = \mathbf{n}\left(\mathbf{J}_S + \rho_S \mathbf{v}\right). \tag{2.88}$$

Deoarece această egalitate este valabilă oricare ar fi orientarea versorului tangent $\mathbf{t}$ la suprafaţa S_d în punctul P rezultă că saltul componentei tangenţiale a vectorului $\mathbf{G}$ este egal cu $\mathbf{J}_S + \rho_S \mathbf{V}$ deci:

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1) = \mathbf{J}_S + \rho_S \mathbf{v} \tag{2.89}$$

sau în formă compactă $rot_S \mathbf{G} = \mathbf{J}_S + \rho_S \mathbf{v}$, sau echivalent:

$$rot_S \mathbf{H} = \mathbf{J}_S + \rho_S \mathbf{v} + rot_S\left(\mathbf{D} \times \mathbf{v}\right), \tag{2.90}$$

care este forma pe suprafeţe de discontinuitate a legii circuitului magnetic.

În cazul mediilor imobile (v=0), rezultă că saltul componentei tangenţiale a intensităţii câmpului magnetic este egală cu densitatea pânzei de curent

$$rot_s \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \tag{2.91}$$

iar în cazul particular în care suprafaţa de discontinuitate nu este parcursă de curent suplimentar $rot_s \mathbf{H} = 0$, ceea ce asigură conservarea componentei tangenţiale a intensităţii câmpului magnetic, deoarece $\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0$ implică egalitatea $(\mathbf{H}_{t_1} = \mathbf{H}_{t_2})$.

Teorema lui Ampére.

În cazul regimului staţionar legea circuitului magnetic se reduce la:

$$u_{m_\Gamma} = i_{S_\Gamma}, \tag{2.92}$$

sau explicit:

$$\oint_\Gamma \mathbf{H} d\mathbf{r} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J} d\mathbf{A}, \tag{2.93}$$

relaţie cunoscută sub numele de teorema lui Ampére. În forma locală această teoremă se exprimă prin:

$$rot \mathbf{H} = \mathbf{J}. \tag{2.94}$$

Observaţii privind legea circuitului magnetic

a) Deoarece viteza corpurilor este relativă la sistemul de referinţă adoptat, rezultă că separarea curentului de deplasare în componentele sale are un caracter convenţional, depinzând de referenţialul ales, în schimb suma acestor componente este invariantă la alegerea sistemului de coordonate. Se consideră de exemplu două corpuri, din care unul este electrizat şi altul neelectrizat în mişcare relativă unul faţă de celălalt. Dacă se ataşează sistemul de referinţă corpului electrizat curentul de convecţie este nul în schimb curentul Röntgen este nenul ceea, ce explică apariţia câmpului magnetic în corpul neelectrizat. Dacă în schimb se ataşează sistemul de referinţă corpului neelectrizat, curentul Röntgen este nul dar curentul de convecţie este nenul.

b) Efectele magnetice au fost verificate experimental şi s-a constatat concordanţă deplină cu legea circuitului magnetic, exceptând curentul Róntgen pentru care s-a constat experimental, că are densitatea $\mathbf{J}_R = rot\,(\mathbf{P}\times\mathbf{v})$. Inadvertenţa între valoarea teoretică şi cea experimentală a curentului Röntgen se explică prin faptul că în teoria Maxwell-Hertz s-a adoptat ipoteza eterului antrenat. Deoarece curbele şi suprafeţele sunt antrenate de corpuri în mişcarea lor, chiar dacă acestea sunt tot mai rarefiate, această ipoteză trebuie adoptată şi în cazul vidului, care este conceput ca un gaz extrem de rarefiat. Explicaţia expresiei corecte a curentului Röntgen a fost dată de electrodinamica Einstein-Minkowski, stabilită pe baza teoriei relativităţii restrânse. Deoarece la viteze mici nerelativiste, teoria Maxwell-Hertz explică satisfăcător şi în mod simplu marea majoritate a efectelor întâlnite în aplicaţiile practice fiind cea mai bună aproximare nerelativistă a electrodinamicii relativisteea a fost adoptată ca bază teoretică a ingineriei electrice.

Aplicaţii ale legii circuitului magnetic

Câmpul magnetic produs de un conductor cilindric parcurs de curent

Se consideră un conductor omogen rectiliniu infinit lung cu secţiune cilindrică de rază a, plasat în vid şi parcurs longitudinal de un curent de conducţie cu densitatea $\mathbf{J}$, constantă în timp (figura 2.18).

Din considerente de simetrie liniile, câmpului magnetic sunt cercuri plasate în plan perpendicular pe axa cilindrului cu centrele plasate pe aceasta şi orientate conform regulii burghiului. Pentru calculul câmpului magnetic într-un punct plasat la distanţa $r < a$ de axă se consideră curba Γ de forma unui cerc cu rază r cu centrul pe axă.

Tensiunea magnetică pe acest cerc este:

$$u_{m_\Gamma} = \oint_\Gamma \mathbf{H}d\mathbf{r} = \oint_\Gamma H\ dr = H\oint_\Gamma dr = H2\pi r, \tag{2.95}$$

iar curentul ce străbate suprafaţa S_Γ este:

$$i_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J}d\mathbf{A} = \int_{S_\Gamma} J\ dA = J\int_{S_\Gamma} dA = J\pi r^2. \tag{2.96}$$

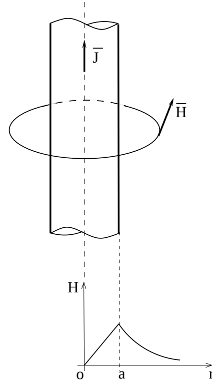


Figura 2.18: Câmpul magnetic produs de un conductor

Conform teoremei lui Ampére $u_{m_\Gamma} = i_{S_\Gamma}$, rezultă:

$$H = \frac{Jr}{2}. \tag{2.97}$$

Dacă se consideră un punct exterior conductorului ($r > a$), tensiunea magnetică are aceiaşi valoare dar intensitatea curentului este:

$$I_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J} d\mathbf{A} = \int_{S_{\Gamma_a}} J dA = J\pi a^2 = I, \tag{2.98}$$

în care s-a notat cu I intensitatea curentului ce străbate o secţiune transversală prin întreg conductorul S_{Γ_a}. Conform teoremei lui Ampére:

$$H = \frac{Ja^2}{2r} = \frac{J}{2\pi r}. \tag{2.99}$$

În consecinţă:

$$H(r) = \begin{cases} Jr/2 & = & Ir/2\pi a^2 & \text{pentru} & r \leq a; \\ Ja^2/2r & = & I/2\pi r & \text{pentru} & r > a. \end{cases}$$

Intensitatea câmpului magnetic are o variaţie liniară cu distanţa faţă de axă în interiorul conductorului pornind de la zero până la valoarea maximă a intensităţii câmpului magnetic, care este obţinută la suprafaţa conductorului $H_{max} = I/2\pi a$.

În exteriorul conductorului câmpul magnetic are o variaţie invers proporţională cu distanţa faţă de axă $h = I/2\pi r$, independentă de raza conductorului.

2.5 Legea legăturii dintre inducţia şi intensitatea câmpului electric

Enunţul legii legăturii dintre D şi E

Inducţia electrică dintr-un punct din spaţiu depnde de intensitatea câmpului electric din acel punct (nu şi de intensiatea câmpului electric din alte puncte):

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}) \tag{2.100}$$

Relaţia de dependenţă dintre **D** şi **E** impusă de această lege poate fi extrem de complicată şi ea este funcţie de tipul substanţei în care se consideră perechea $\mathbf{D} - \mathbf{E}$.

O formă echivalentă a acestei relaţii este următoarea:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{2.101}$$

în care s-au pus în evidenţă $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi 9 \cdot 10^9}\ F/m$ constanta universală numită permitivitatea vidului şi $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ polarizaţia corpului. Aceasta poate fi descompusă într-o componentă *permanentă* $\mathbf{P}_p = \mathbf{P}(0)$ şi una *temporară* $\mathbf{P}_t$, existentă doar în prezenţa câmpului electric ($\mathbf{E} \neq 0$), astfel încât $\mathbf{P} = \mathbf{P}_t(\mathbf{E}) + \mathbf{P}_p$. Din acest motiv această lege mai poartă şi numele de legea polarizaţiei (temporare).

În absenţa corpurilor polarizaţia este nulă ($P \neq 0$), deci în vid $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, ceea ce evidenţiază faptul că în vid este suficient un singur câmp vectorial pentru a caracteriza câmpul electric. Deosebirea dintre inducţie şi intensitate are relevanţă doar în corpuri, urmând ca diferenţa $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}$ să poată fi considerată definiţia polarizaţiei acestora.

O semnificaţie posibilă a acestei legi constă în faptul că intensitatea câmpului electric este evidenţiată ca o cauză a polarizării corpurilor şi că un corp polarizat produce câmp electric sau perturbă câmpul electric preexistent.

De multe ori relaţia $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ se aproximează cu o dependenţă afină (obţinută de exemplu prin reţinerea doar a primilor doi termeni din seria Taylor) de tipul:

$$\mathbf{D} = \overline{\overline{\epsilon}} \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{2.102}$$

în care $\mathbf{P}_p$ este chiar polarizaţia permanentă iar $\overline{\overline{\epsilon}}$ este tensorul permitivităţilor absolute care de multe ori are valorile principale egale, deci degenerează într-un scalar. Se constată că legea pune în evidenţă o nouă cauză a câmpului electric şi anume polarizaţia permanentă $\mathbf{P}_p$, care dacă este nenulă (cum se întâmplă în cazul electreţilor) este capabilă să producă un câmp electric $E \neq 0$, chiar dacă $D = 0$ şi invers.

Figura 2.19 prezintă spectrele intensităţii şi inducţiei electrice şi se constată că **D** are liniile de câmp închise (în acord cu legea fluxului electric), în schimb **E** are liniile de câmp deschise (în acord cu legea inducţiei). În aer cele două spectre se suprapun ($\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$) pe când în electric **D** şi **E** au sensuri opuse.

Capacitatea corpurilor polarizate permanent de a produce câmp electric poate fi considerată un alt fenomen fizic fundamental, care evidenţiază a treia cauză posibilă a câmpului electric.

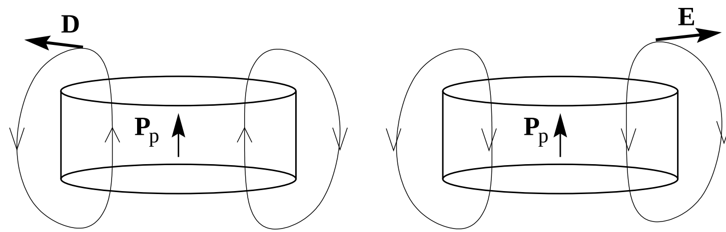


Figura 2.19: Spectrele **E**, **D** produse de un electret

Mai mult, introducerea oricărui corp într-un câmp electric aflat initial în vid modifică acest câmp atât în interiorul corpului cât şi în vecinătatea sa, datorită polarizării temporare a corpului.

2.6 Legea legăturii dintre inducţia intensitatea câmpului magnetic

Enunţul legii legăturii dintre B şi H

Inducţia câmpului magnetic dintr-un punct este dependentă de intensitatea câmpului magnetic din acel punct

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}),$$

forma concretă a acestei relaţii fiind în funcţie de natura mediului în care se află punctul.

În cazul vidului relaţia dintre intensitatea şi inducţia câmpului magnetic este de coliniaritate şi proporţionalitate:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \tag{2.103}$$

Constanta de proporţionalitate μ_0, numită **permeabilitatea vidului** are caracterul uni constante universale, a cărei valoare este dependentă doar de sistemul unităţilor de măsură adoptat. În cazul sistemului internaţional al unităţilor de măsură valoarea acestei constante este:

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{H}{m}. \tag{2.104}$$

În cazul vidului nu se justifică utilizarea a doi vectori **H** şi **B** pentru caracterizarea stării câmpului magnetic dintr-un punct. În schimb acest lucru este necesar în cazul corpurilor, pentru a caracteriza fenomenele specifice care au loc în acestea în urma interacţiunii cu câmpul magnetic.

Ca şi în cazul dielectricilor, mediile se împart din punct de vedere magnetic în medii liniare şi neliniare, izotrope şi anizotrope, cu efecte de ereditate (postefect sau histerezis) sau fără astfel de efecte.

Mediile liniare şi izotrope sunt medii în care relaţia dintre **B** şi **H** este asemănătoare vidului, respectiv de proporţionalite şi coliniaritate:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \tag{2.105}$$

şi la care constanta de proporţionalitate μ, numită *permeabilitate* este un scalar care depinde de natura mediului.

Pentru caracterizarea proprietăţilor magnetice ale unui mediu se poate utiliza mărimea adimensională:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}, \tag{2.106}$$

numită permeabilitate relativă obţinută prin reportarea permeabilităţii mediului la cea a vidului.

Majoritatea substanţelor au o comportare magnetică de tipul (2.105). Mai mult, valoarea permeabilităţii relative este foarte aproape de unitate, deosebirea survenind doar la a cincea cifră semnificativă ($\mu_{r_{Cu}} = 1-10^{-5}, \mu_{r_{Al}} = 1+2210^{-6}$), ceea ce este neesenţial din punct de vedere practic. Excepţie fac fierul, nichelul, cobaltul şi anumite combinaţii ale acestora. Aceste materiale neliniare se numesc feromagnetice şi se pot clasifica în două mari categorii.

Materiale feromagnetice moi, dintre care tipic este oţelul electrotehnic (puternic aliat cu siliciu, în proporţie $2-4\%$). Modul în care variază inducţia în funcţie de intensitatea câmpului magnetic:

$$B = f(H)$$

are reprezentarea tipică din figura 2.20

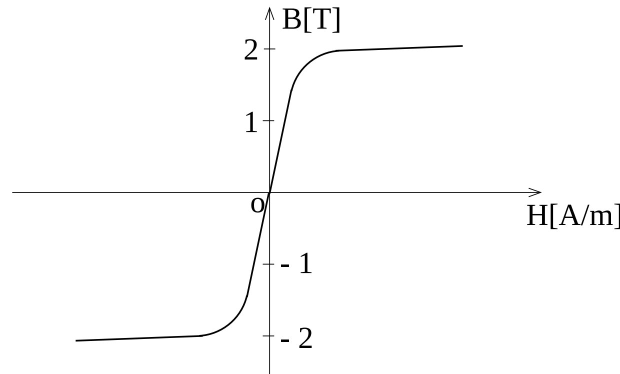


Figura 2.20: Caracteristica de magnetizare

Pe o astfel de curbă, numită caracteristică de magnetizare se constată o porţiune practic liniară, aflată în jurul originii, pentru care $B = \mu_r\mu_0 H$,cu valori mari ale permeabilităţii relative $\mu_r = 10^3 - 10^5$. La câmpuri magnetice intense

($B > 1,5 - 2T$) se constată saturarea materialului magnetic, respectiv o creştere mai puţin importantă a inducţiei magnetice în funcţie de intensitatea câmpului magnetic, astfel încât în final, pentru câmpuri foarte mari caracteristica de magnetizare tinde către o dreaptă de pantă μ_0, cu ecuaţia:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M_s}). \tag{2.107}$$

în care vectorul $\mathbf{M_s}$ se numeşte magnetizaţie de saturaţie.

Materialele feromagnetice moi se folosesc în practică sub formă de armături realizate din pachete de tole (de grosimi $0.35 - 0.5mm$), pentru concentrarea şi dirijarea câmpului magnetic. Pentru ca ele să fie eficiente este necesar să aibă permeabilităţi relative mari, ceea ce explică utilizarea materialelor moi în zona liniară.

În construcţia transformatoarelor de mare putere se utilizizează tole supuse procesului tehnologic de texturare (orientarea microcristalelor după o direcţie privilegiată prin laminare la rece). Aceste tole au un caracter **anizotrop** urmând ca în zona liniară dependenţa dintre **B** şi **H** să poată fi exprimată prin relaţia:

$$\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}\mathbf{H}. \tag{2.108}$$

în care permeabilitatea μ este un tensor de ordinul doi având una din direcţiile principale orientată în sensul direcţiei de laminare.

Materiale feromagnetice dure au o caracteristică de magnetizare neunivocă, cu un puternic efect de histerezis (fig 2.21).

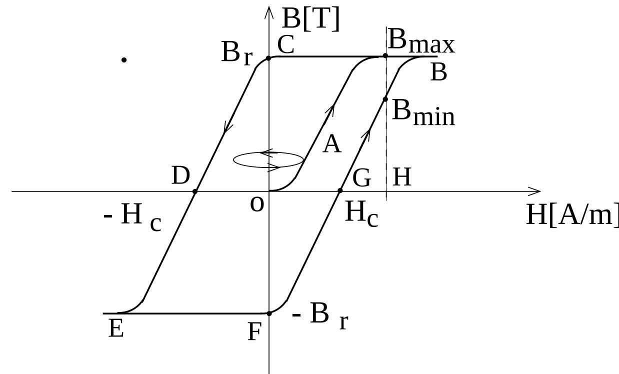


Figura 2.21: Ciclul de histerezis

Pornind de la o stare iniţială O, în care $B = 0, H = 0$, creşterea intensităţii câmpului magnetic determină creşterea monotonă a inducţiei magnetice, pe curba OAB, numită curbă de primă magnetizare. Se constată că panta iniţială a acestei curbe este mai mică, apoi creşte şi scade din nou, tinzând pentru câmpuri intense către μ_o, datorită saturaţiei magnetice.

După o saturaţie prealabilă, scăderea inducţiei nu mai urmăreşte caracteristica de primă magnetizare, obţinându-se ramura descendentă B, C, D, E a ciclului de histerezis. Se constată că la anularea intensităţii câmpului magnetic, inductivitatea are o valoare nenulă, $\mathbf{B}_r$ numită *inducţie remanentă*. Pentru anularea inducţiei este necesară aplicarea unui câmp magnetic de sens opus, $\mathbf{H}_c$ numit *câmp magnetic coercitiv*. După o saturaţie inversă (punctul E în ciclul de histarezis) revenirea la saturaţia directă se realizează prin creşterea intensităţii câmpului magnetic pe ramura ascendentă E, F, G, B similară ramurii descendente (simetrica acesteia faţă de origine).

Ciclul fundamental de magnetizare, obţinut prin variaţii ciclice ale intensităţii câmpului magnetic între două limite extreme, care asigură saturaţia puternică în cele două sensuri, delimitează multimea punctelor din planul $B - H$ accesibile perechilor (B, H). Dacă variaţia în timp a intensităţii câmpului magnetic nu atinge nivelul de saturaţie, atunci caracteristica de magnetizare formează cicluri minore, incluse în ciclul fundamental. În consecinţă, pentru o valoare a intensităţii câmpului magnetic, inducţia magnetică poate lua orice valoare cuprinsă între limitele extreme $B \in [B_{min}, B_{max}]$, valoare dependentă de evoluţia anterioară în timp a intensităţii câmpului magnetic. Pentru demagnetizarea unui astfel de material se revine la starea $B = 0, H = 0$, prin aplicarea unui câmp magnetic oscilant, a cărui amplitudine scade progresiv spre zero. În acest fel sunt parcurse ciclurile minore cu arie din ce în ce mai mică, cuprinse unul în altul până la atingerea originii.

Caracteristica de histerezis poate fi aproximată pe porţiuni (mai ales în cadranul doi) prin relaţia:

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{H} + \mathbf{M_p}). \tag{2.109}$$

în care vectorul $\mathbf{M_p}$ numit de **magnetizaţie permanentă** pune în evidenţă fenomenul de magnetizaţie permanentă datorat unei magnetizări anterioare. Materialele feromagnetice dure sunt utilizate în practică la construcîa magneţilor permanenţi.

În afara inducţiei magnetice remanente şi a intensităţii câmpului magnetic coercitiv (tabelul 2.1 materialele magnetice dure mai sunt caracterizate de:

- permeabilitatea relativă statică : $\mu_s = \frac{B}{\mu_o H}$;
- permeabilitatea diferenţială relativă pentru creşteri ΔH pozitive :

$$\mu_{dif} = \lim_{\Delta H \to 0} \frac{\Delta B}{\mu_0 \Delta H}\Big|_{\Delta H > 0} = tg\alpha$$

- permeabilitatea reversibilă relativă obţinută:

$$\mu_{rev} = \lim_{\Delta H \to 0} \frac{\Delta B}{\mu_o \Delta H}\Big|_{\Delta H < 0} = tg\beta$$

În particular, pentru variaţii ale câmpului magnetic în jurul originii se obţine permeabilitatea relativă iniţială:

$$\mu_{in} = \lim_{\Delta H \to 0} \frac{\Delta B}{\mu_o \Delta H}\bigg|_{H=0,B=0}. \tag{2.110}$$

Variaţia tipică a permeabilităţii în funcţie de intensitatea câmpului magnetic este reprezantată grafic în (fig. 2.22)

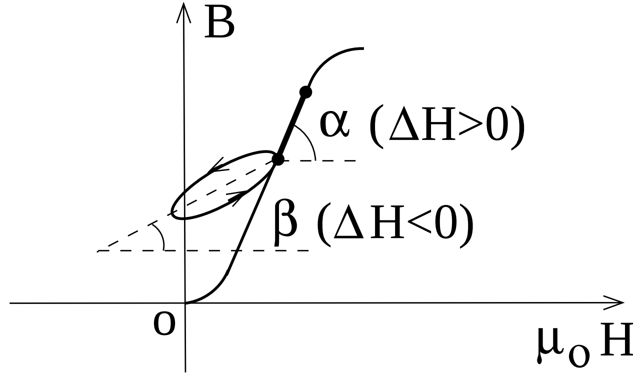


Figura 2.22: Variaţia permeabilităţii

Caracteristicile magnetice ale materialelor feromagnetice sunt influenţate de presiune şi temperatură respectiv de starea de tensiune mecanică din interiorul corpului şi de tratamentul termic la care acesta a fost supus.

Fenomenul de histerezis este întâlnit nu numai la materialele feromagnetice dure ci şi la cele moi, dar într-o măsură mult mai mică, de exemplu fierul pur are câmpul magnetic coercitiv de circa o mie de ori mai mic decât al oţelului dur cu $1\%C$. Mediile neliniare pot avea o comportare anizotropă de exemplu, în cazul unui cristal de fier relaţia B(H) depinde de orientarea intensităţii câmpului magnetic **H** (fig. 2.22)

Şi în cazul materialelor magnetice, inducţia magnetică nu urmăreşte cu fidelitate variaţiile rapide ale intensităţii câmpului magnetic datorită fenomenului de *vâscozitate magnetică* (postefect). Acest efect poate fi modelat utilizând relaţia:

$$\mathbf{B}(t) = \int_0^{\infty} \mu'(\tau)\, \mathbf{H}(t-\tau) d\tau, \tag{2.111}$$

în care funcţia ereditară de pondere $\mu'(\tau)$ este o funcţie monoton descrescătoare, definită pe intervalul $(0, \infty)$. Prezenţa postefectului face pe de o parte ca aria ciclului de histerezis să crească o dată cu frecvenţa şi pe de altă parte ca permeabilitatea reversibilă definită în câmp variabil (numită permeabilitate dinamică) să scadă cu creşterea frecvenţei.

Tabela 2.1: Caracteristici ale unor materiale magnetice

Material	μ_{in}	$B_r[T]$	$H_c[A/m]$
Fier pur	25000	14	4
Oţel electrotehnic (4 % Si)	500	1,8	40
Permalloy (78,5 % Ni, 21,5 % Fe)	10000	0,6	4
Ferită moale (mangan-zinc)	2000	0,15	20
Oţel 1%C	40	0,7	5000
Alnico	4	0,73	34000
Ferită dură	1,2	0,35	200000

Dacă pentru relaţia $B-H$ se adoptă modelul unui sistem liniar de ordinul întâi, atunci funcţia ereditară de pondere are expresia $\mu'(\tau)=\frac{\mu}{\tau_o}e^{\frac{-\tau}{\tau_o}}$, iar permeabilitatea dinamică relativă este $\mu_d=\mu/\mu_0/\sqrt{1+(\omega\tau_o)^2}$.

Observaţii privind legea legăturii $B-H$ şi semnificaţia ei fizică

a) Materialele magnetice liniare cât şi cele neliniare au o comportare echivalentă unor medii cu permeabilitatea vidului μ_0, dar cu o magnetizaţie dependentă de intensitatea câmpului magnetic, numită magnetizaţie temporală $\mathbf{M_t}=\mathbf{M_t}(\mathbf{H})$, urmând ca:

$$\mathbf{B}=\mu_s(\mathbf{H}+\mathbf{M_t}). \tag{2.112}$$

În cazul mediilor liniare, magnetizaţia temporală este proporţională cu intensitatea câmpului magnetic $\mathbf{M_t}=\overline{\overline{\chi_\mathbf{m}}}\mathbf{H}$, factorul de proporţionalitate $\overline{\overline{\chi_m}}$ numit susceptibilitate magnetică fiind un scalar în cazul mediilor izotrope şi un tensor de ordinul doi în cazul mediilor anizotrope. Între susceptibilitatea magnetică şi permeabilitate există următoarea relaţie:

$$\mathbf{B}=\mu_o(\mathbf{H}+\mathbf{M_t})=\mu_\mathbf{o}(\mathbf{H}+\overline{\overline{\chi_\mathbf{m}}}\mathbf{H})=\mu_\mathbf{o}(\overline{\overline{\mathbf{1}}}+\overline{\overline{\chi_\mathbf{m}}})\mathbf{H}, \tag{2.113}$$

$$\overline{\overline{\mu}}=\mu_o(\overline{\overline{1}}+\overline{\overline{\chi_m}}). \tag{2.114}$$

În cazul mediilor neliniare cu magnetizaţie permanentă, relaţia dintre $\mathbf{B}$ şi $\mathbf{H}$ se poate exprima prin relaţia:

$$\mathbf{B}=\mu_o(\mathbf{H}+\mathbf{M_t}(\mathbf{H})+\mathbf{M_p}). \tag{2.115}$$

în care suma vectorilor $\mathbf{M} = \mathbf{M_t}(\mathbf{H}) + \mathbf{M_p}$ poartă numele de **magnetizaţie**. Folosind magnetizaţia relaţia $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ se poate exprima în general prin:

$$\mathbf{B} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \tag{2.116}$$

b) legea legăturii dintre $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ descrie fenomenul de magnetizare, cunoscut şi sub numele de polarizaţie magnetică.

Din punct de vedere microscopic, unele corpuri au moleculele polare din punct de vedere magnetic. Acestea sunt echivalente cu mici bucle de curent, a căror apariţie se poate explica prin deplasarea electronilor în jurul nucleelor sau calitativ prin rotirea electronilor în jurul propriei axe (spin). Sub acţiunea câmpului magnetic buclele de curent, orientate iniţial arbitrar se orientează după direcţia câmpului exterior, contribuind la modificarea acestuia. Datorită agitaţiei termice orientarea nu este perfectă ci are un caracter statistic, dispărând după anularea câmpului magnetic, exterior. În cazul corpurilor feromagnetice, apare o orientare spontană a spinilor după o direcţie comună, în interiorul unor microdomenii, numite domenii Weiss. Iniţial domeniile Weiss sunt orientate arbitrar, dar sub acţiunea câmpului magnetic extern acestea au tendinţa să se orienteze în directia câmpului. Cu cât câmpul este mai intens cu atât orientarea este mai apropiată de cea a câmpului, urmând ca la atingerea saturaţiei toate domeniile să aibă aceeaşi orientare. Fenomenul de histerezis se explică prin faptul că orientarea privilegiată a blocurilor Weiss se menţin sî după dispariţia câmpului extern.

Din punct de vedere macroscopic fenomenul de magnetizare se evidenţiază prin faptul că introducerea unui corp în câmp magnetic atrage după sine modificarea câmpului. Mai mult corpurile magnetizate permanent sunt capabile să genereze câmp magnetic, chiar şi în absenţa câ mpului exterior, aşa cum se întâmplă în cazul magneţilor permanenţi.

Teorema tubului de flux magnetic.

Pentru determinarea formei globale a legii legăturii $\mathbf{B}$ şi $\mathbf{H}$ se consideră un tub flux magnetic, mărginit de o suprafaţă laterală S_l pe care inducţia magnetică este orientată longitudinal şi două suprafeţe externe S_1 şi S_2 pe care intensitatea cm̂pului magnetic este orientată normal. (fig. 2.23)

O mărime globală caracteristică stării magnetice a unui tub de flux este fluxul transversal:

$$\varphi = \int_S \mathbf{B}d\mathbf{A} = \int_{S_1} \mathbf{B}d\mathbf{A} = \int_{S_2} \mathbf{B}d\mathbf{A}, \tag{2.117}$$

care conform legii fluxului magnetic are aceeaşi valoare pe orice suprafaţă transversală.

Mărimea globală asociată intesităţii câmpului magnetic este tensiunea magnetică. Pentru ca aceasta să nu depindă de forma curbei considerate este necesar ca

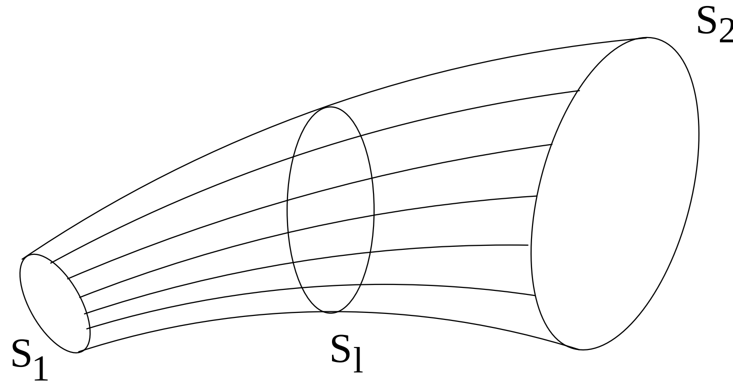


Figura 2.23: Tubul de flux magnetic

tensiunea magnetică pe orice curbă închisă să fie nulă. Acest lucru este asigurat în regim staţionar, dacă tubul de flux nu este străbătut de curent electric. Dacă aceste condiţii sunt îndeplinite, conform legii circuitului magnetic, tensiunea:

$$u_m = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{H}\, d\mathbf{r} \tag{2.118}$$

are aceaşi valoare, indiferent care este $P_1 \in S_1$ şi $P_2 \in S_2$.

În cazul mediilor liniare, relaţia locală de proporţionalitate $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ se reflectă şi la nivel global şi conform teoremei tubului de flux magnetic, ea reprezintă forma globală a legii legăturii $\mathbf{B} - \mathbf{H}$.

Enunţul teoremei tubului de flux magnetic

Fluxul magnetic staţionar ce străbate un tub de flux format într-un mediu liniar neparcurs de curent electric este propoţional cu tensiune a magnetică existentă între extremităţi:

$$\varphi = \Lambda_m \cdot u_m. \tag{2.119}$$

Constanta de proporţionalitate Λ_m se numeşte *permeanţa tubului de flux magnetic* şi nu depinde de flux, ci doar de geometria acestuia şi de natura materialului magnetic considerat. În particular, în cazul mediilor omogene din punct de vedere magnetic:

$$\Lambda_m = \mu\, \Lambda. \tag{2.120}$$

Permeanţa magnetică fiind proporţională cu permeabilitatea mediului μ şi cu permeanţa geometrică Λ a tubului de flux.

Aplicaţii

1. Permeanţa unui tub de flux în câmp magnetic uniform.

   Datorită similitudinii matematice care există între ecuaţiile câmpului elec tric şi cele ale câmpului magnetic în ipotezele teoremelor tuburilor de flux,

permeanţele geometrice a două tuburi de flux de aceeaşi formă şi dimensiune au valori egale, indiferent de natura tubului de flux. În consecinţă permeanţa unui tub de flux magnetic în câmp uniform este:

$$\Lambda_m = \mu \cdot \Lambda = \mu \frac{A}{l}. \tag{2.121}$$

în care A este aria secţiunii transversale şi l este lungimea tubului de flux.

2. Permeanţa unui tub de flux din câmpul magnetic produs de un curent rectiliniu.

   Un conductor rectiliu infinit lung, plasat intr-un mediu omogen cu permeabilitatea μ şi parcurs de curentul I produce în exteriorul lui la distanţa R un câmp magnetic cu intensitatea:

$$H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot R} \tag{2.122}$$

   şi inducţia $B = \mu H = \mu I/(2\pi R)$. Liniile câmpului magnetic sunt cercuri cu centrele plasate pe axa firului. Un dreptunghi plasat în planul firului cu două laturi paralele cu firul situate la distanţele a şi b de acestea, având înalţimea h generează un tub de flux a cărui deschidere este caracterizată de unghiul α (figura 2.24)

   Tensiunea magnetică de-a lungul tubului de flux este:

$$u_m = \int_{C_{12}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_{12}} H \cdot dr = \frac{I}{2 \cdot \pi} \int_{C_{12}} \frac{dr}{R} = \frac{I}{2 \cdot \pi} \int_0^{\alpha} d\beta = \frac{I\alpha}{2 \cdot \pi}, \tag{2.123}$$

   iar fluxul magnetic este:

$$\varphi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{A} = \int_S B \cdot dA = \frac{\mu I}{2 \cdot \pi} \int_S \frac{dA}{R} = \frac{\mu I h}{2 \cdot \pi} \int_a^b \frac{dR}{R} = \frac{\mu I h}{2 \cdot \pi} ln \frac{b}{a}. \tag{2.124}$$

   În consecinţă, permeanţa tubului de flux magnetic are expresia:

$$\Lambda_m = \frac{\varphi}{u_m} = \frac{\mu h}{\alpha} \cdot ln \frac{b}{a}. \tag{2.125}$$

2.7 Legea conducţiei electrice

Enunţul legii

Densitatea curentului electric dintr-un punct este dependentă de intensitatea câmpului electric din acel punct $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$, *forma concretă a acestei relaţii fiind în funcţie de natura corpului în care se consideră punctul respectiv.*

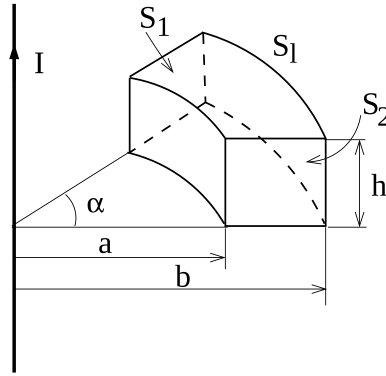


Figura 2.24: Tubul de flux produs de un fir

Din punctul de vedere al conducţiei, mediile se clasifică în liniare sau neliniare, izotrope sau anizotrope, efectele de ereditate locală fiind nesemnificative în cazul conducţiei.

Deoarece **în vid** fenomenul de conducţie este inexistent, în acest caz legea conducţiei degenerează în:

$$\mathbf{J} = 0. \tag{2.126}$$

În majoritatea cazurilor întâlnite în aplicaţiile practice densitatea de curent este proporţională şi coliniară cu intensitatea câmpului electric:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \tag{2.127}$$

Aceste medii se numesc conductoare liniare şi izotrope, iar constanta de proporţionalitate σ, specifică fiecărei substanţe (dar dependentă de temperatură) poartă numele de *conductivitate electrică*. Mediile liniare şi izotrope pot fi caracterizate din punctul de vedere al conducţiei folosind constanta $\rho = 1/\sigma$ numită *rezistivitate electrică* (a nu se confunda cu densitatea de sarcină !). Folosind rezistivitatea relaţia dintre J şi E devine:

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}. \tag{2.128}$$

În funcţie de valoarea conductivităţii, substanţele se clasifică în trei mari categorii:

– izolante ($\sigma = 0$, $\rho \to \infty$);

– conductoare ($\sigma \neq$, $\rho \neq 0$);

– supraconductoare ($\sigma \to \infty$, $\rho = 0$).

În cazul corpurilor izolante, legea conducţiei are forma specifică vidului ($J = 0$), astfel de corpuri nefiind parcurse de curent electric. Dintre acestea se menţionează

gazele uscate, uleiul mineral, sticla, ceramica, masele plastice, cartonul etc. Caracterul izolant al acestor corpuri este pierdut dacă intensitatea câmpului electric depăşete o valoare limită E_{max}, specifică fiecărei substanţe şi numită *rigiditate dielectrică*. La depăşirea rigidităţii dielectrice, în corp au loc modificări fizico-chimice ireversibile, datorate fenomenului de străpungere electrică.

Corpurile supraconductoare (dintre care se menţionează Nb la temperatura $T < 273K$) au o rezistivitate practic nulă, legea conducţiei electrice căpătând forma:

$$\mathbf{E} = 0. \tag{2.129}$$

Se constată că în corpurile supraconductoare intensitatea câmpului electric este nulă. Totuşi, valori mari ale densităţii de curent determină câmpuri magnetice intense care fac ca starea de supraconductibilitate să dispară.

Corpurile conductoare se împart la rândul lor în trei categorii: bune conductoare, semiconductoare şi slabe sonductoare. Din categoria corpurilor bune conductoare fac parte în primul rând metalele dintre care în acest scop se folosesc în practica mai ales Cu, Al, Ag şi Au a căror conductivitate este de circa $10^5 S/m$ (tabelul 2.2).

Tabela 2.2: Constantele de material ale conductoarelor metalice

Material	$\rho[\Omega mm^2/m]$	$\sigma[S/m]$	Coeficient de temperatură
Argint	0,0161	$0{,}621 \cdot 10^6$	0,004
Cupru	0,0172	$0{,}58 \cdot 10^6$	0,0044
Aur	0,0237	$0{,}422 \cdot 10^6$	0,004
Aluminiu	0,0278	$0{,}350 \cdot 10^6$	0,0038
Fier	0,0918	$0{,}109 \cdot 10^6$	0,0062

În cazul metalelor rezistivitatea creşte cu creşterea temperaturii, relaţia putând fi aproximată liniar prin:

$$\rho(\theta) = \rho_0[1 + \alpha(\theta - \theta_0)] \tag{2.130}$$

în care α este coeficient de creştere cu temperatura a cărui valoare tipică este $5 \cdot 10^{-3} K^{-1}$, iar ρ_0 este rezistivitatea la temperatura de referinţă θ_0.

Corpurile semiconductoare (tipice fiind Si şi Ge) au o conductivitate mult mai mică decât a metalelor ($10^-3 \div 10 S/m$) cu valoare puternic dependente de temperatură şi de puritatea substanţei. Spre deosebire de metale, în cazul semiconductoarelor rezistivitatea scade cu creşterea temperaturii, pentru caracterizarea acestei dependenţe folosindu-se relaţia:

$$\rho(\theta) = \rho_0 e^{-\gamma(\theta - \theta_0)} \tag{2.131}$$

în care γ este coeficientul de variaţie cu temperatura, iar $\rho_0 = \rho(\theta_0)$ fiind rezistivitatea la temperatura de referinţă.

Corpurile slab conductoare au conductivităţi cuprinse în intervalul $10^{-5} \div 10^{-10} S/m$. Un exemplu în acest sens este apa distilată şi în general electroliţii slabi a căror conductivitate este puternic influenţată de concentraţia de săruri. În realitate şi corpurile izolante au o conductivitate nenulă dar foarte mică ($10^{-10} \div 10^{-20} S/m$).

Se constată că rezistivitatea (şi implicit conductivitatea) electrică este una din mărimile cu gama de valori extrem de amplă, care acoperă circa 25 de ordine de mărime, ceea ce face ca determinarea ei experimentală să ridice probleme extrem de dificile în tehnica măsurărilor electrice.

O altă categorie de corpuri o reprezintă conductoarele **liniare şi anizotrope**, la care legea conducţiei are forma:

$$\mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E}, \tag{2.132}$$

în care $\overline{\overline{\sigma}}$ este tensor simetric de ordinul doi, numit tensorul conductivităţii. În cazul în care axele sistemului de coordonate cartezian sunt orientate după direcţiile principale, matricea tensorului se reduce la o matrice diagonală. Matricea prin care se reprezintă tensorul $\overline{\overline{\sigma}}$ este inversabilă asfel încât conducţia anizotropă în astfel de medii poate fi caracterizată şi prin tensorul rezistivităţii $\overline{\overline{\rho}} = \overline{\overline{\sigma}}^{-1}$:

$$\mathbf{E} = \overline{\overline{\rho}}\,\mathbf{J}. \tag{2.133}$$

Caracterul anizotrop al unui mediu se poate datora structurii sale interne sau unor cauze neelectrice, care generează o direcţie privilegiată, cum se întâmplă în cazul efectelor galvano-magnetice, care constau în influenţa pe care câmpul magnetic o are asupra conducţiei $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. Dintre aceste efecte cel mai important este efectul Hall, care poate fi modelat matematic printr-o relaţie $\mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}\,\mathbf{E}$ tensorială. În cazul în care se presupune că vectorul $\mathbf{B} = \mathbf{kB}$, tensorul conductivităţii are reprezentarea matriceală:

$$\overline{\overline{\sigma}} = \sigma \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\beta^2} & \frac{1}{1+\beta^2} & o \\ \frac{\beta}{1+\beta^2} & \frac{1}{1+\beta^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

în care $\beta = C_H \cdot B$ este o mărime proporţională cu inducţia magnetică, prin constanta Hall C_H, specifică materialului. Se constată că în absenţa câmpului magnetic (B=0) tensorul $\overline{\overline{\sigma}}$ degenerează în pseudoscalarul $\overline{\overline{\sigma}} = \sigma\overline{\overline{1}}$.

Nu toate corpurile asigură o relaţie de proporţionalitate între **J** şi **E**. Mediile în care relaţia de proporţionalitate nu este îndeplinită se numesc **medii neliniare** din punctul de vedere al conducţiei. Cel mai simplu model de material pentru mediile neliniare este descris de relaţia:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i), \tag{2.134}$$

în care vectorul $\mathbf{E}_i$, caracteristic corpului se numeşte **câmp electric imprimat**, apariţia lui având în general cauze neelectrice (neuniformităţi de temperatură sau concentraţie, neomogenităţi, forţe de inerţie). Prezenţa câmpurilor electrice imprimate face posibilă apariţia fenomenului de conducţie ($J \neq 0$) chiar şi în absenţa câmpului electric ($E = 0$) sau reciproc apariţia câmpului electric ($E \neq 0$) în conductoare nestrăbătute de curent ($J = 0$).

Se deosebesc următoarele tipuri de câmpuri imprimate:

– câmp imprimat de acceleraţie, în metale are o distribuţie volumică dată de relaţia:

$$\mathbf{E}_i = -\frac{m_0}{e}\mathbf{a} \tag{2.135}$$

în care m_0 este masa electronului, e_0 este sarcina sa iar **a** este acceleraţia corpului faţă de un sistem de referinţă inerţial;

– câmp electric imprimat datorat neuniformităţilor de temperatură (prin efect Thomson);

– câmp electric imprimat de concentraţie, apare în electroliţii cu concentraţii neuniforme, datorită difuziei purtătorilor de sarcină;

– câmpuri electrice imprimate de contact (voltaice); la suprafaţa de contact între două corpuri metalice diferite apare un câmp electric de interfaţă distribuit normal la suprafaţă pe o adâncime mică ($10^{-10}m$) între cele două corpuri, datorită difuziei electronilor dintr-un corp în altul, aceste câmpuri sunt dependente de temperatura suprafeţei de contact (efectul Peltier-Seebeck);

– câmp electric de natură galvanică, care apare la suprafaţa de contact dintre un metal şi un electrolit;

– câmp fotovoltaic imprimat, care apare la suprafaţa de contact între un metal şi un semiconductor, sub acţiunea luminii care cade pe această interfaţă.

Câmpurile electrice imprimate apărute în joncţiunile dintre două semiconductoare dopate diferit sau dintre un metal şi un semiconductor explică funcţionarea dispozitivelor semiconductoare (diode, tranzistoare, tranzistoare cu efect de câmp, fotodiode etc). În acest caz câmpul electric imprimat depinde de densitatea de curent.

O altă categorie de corpuri o reprezintă mediile cu conducţie neliniară, la care $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$. De obicei acestea au o comportare izotropă, cu densitatea de curent coliniară cu intensitatea câmpului electric, deci pot fi caracterizate de funcţia reală $J = J(E)$.

Conducţia neliniară se datoreşte fie efectelor temperaturii, cum se întâmplă în cazul rezistoarelor termice (ca de exemplu în lămpile cu incandescenţă) fie neomogenităţilor microstructurale (ca în rezistorul cu carborund).

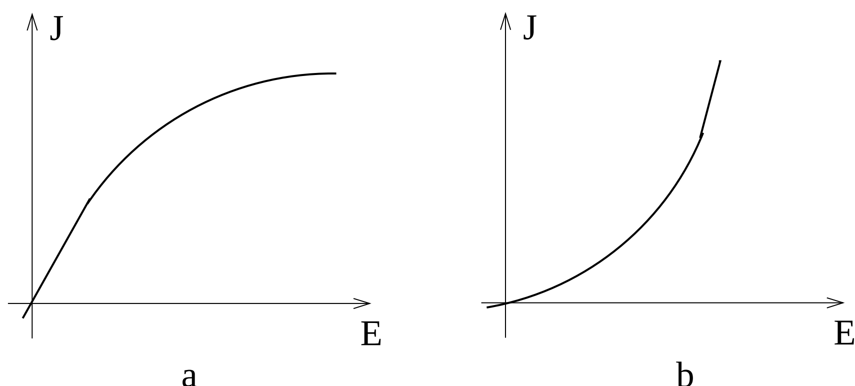


Figura 2.25: Caracteristici de conducţie

În cazul rezistoarelor termice, trecerea curentului electric prin acestea determină încălzirea lor, ceea ce modifică rezistenţa electrică deci implicit valoarea densităţi de curent J, pentru o anumită intensitate a câmpului electric (fig. 2.25 a). Cum dependenţa dintre densitatea de curent şi temperatură nu are un caracter local şi instantaneu, modelarea fenomenelor din rezistoarele tremice prin relaţia $J = J(E)$ are doar un caracter aproximativ, fiind valabilă cel mult în regim staţionar.

Rezistorul cu carborund este format din granule fine de carbură de siliciu sinterizate într-o masa ceramică. Granulele sunt înconjurate într-o peliculă de SiO_2 iar la suprafaţa lor de contact se formează joncţiuni semiconductoare, cu caracteristică tensiune-curent neliniară. Din punct de vedere macroscopic densitatea de curent J depinde neliniar de E conform graficului din figura 2.25 b.

Cu excepţia rezistoarelor termice, mediile conductoare nu prezintă efecte de ereditate semnificative (la frecvenţe sub 10^{15}Hz în cazul metalelor şi 10^{10}Hz în cazul electroliţilor)

Interpretarea microscopică a legii conducţiei.

Metalele sunt alcătue din atomi ale căror nuclee formează o reţea cristalină şi care au o parte din electroni liberi, ce au o mişcare de agitaţie termică în tot volumul corpului. La un moment dat, datorită orientării arbitrare pe care o au vitezele electronilor liberi, media vectorială a vitezei acestora este nulă. Sub acţiuna unui câmp electric exterior electronii capătă o acceleraţie orientată în direcţia acestuia. Energia cinetică suplimentară, căpătată de fiecare electron în intervalul dintre două ciocniri succesive este transmisă reţelei la următoarea ciocnire. Acest efect determină o creştere a temperaturii corpului, iar din punct de vedere al electronilor interacţiunea cu reţeaua cristalină se comportă ca o forţă de frecare ce se opune mişcării ordonate a acestora. În cazul electroliţilor mecanismul conducţiei se deosebeşte prin faptul că de această dată purtătorii liberi de sarcină sunt ionii.

În consecinţă, fenomenul de conducţie constă în deplasarea ordonată a purtătorilor liberi de sarcină sub acţiunea unui câmp electric exterior, deplasare suprapusă peste mişcarea naturală, de agitaţie termică a acestora.

Sub acţiunea aceluiaşi câmp electric, purtătorii liberi de sarcină pot căpăta viteze medii diferite. Mobilitatea mare a electronilor liberi din metale explică valoarea mare a conductivităţii acestora, iar mobilitatea mică a ionilor din electroliţi explică slaba lor conductivitate. Din acest motiv, la valori comparabile ale densităţii de curent, viteza medie a electronilor din metale este mult mai mică decât cea a ionilor din electroliţi.

Aparţia câmpurilor electrice imprimate se explică prin forţe de natură neelectrică ce acţionează asupra purtătorilor de sarcină. De exemplu, câmpurile electrice imprimate de acceleraţie se datoresc forţelor de inerţie care acţionează asupra purtătorilor liberi de sarcină iar cele datorate neomogenităţilor se explică prin difuzia concentraţiei purtătorilor liberi de sarcină.

Semnificaţia fizică a legii conducţiei.

Legea conducţiei pune în evidenţă cauza principală a apariţiei curentului electric de conducţie şi anume câmpul electric.

În cazul mediilor cu câmp electric imprimat, acesta este evidenţiat ca o nouă cauză posibilă a câmpului electric. În acest fel se explică, de exemplu, câmpul electric produs de elementele galvanice.

Teorema tubului de curent (Relaţia lui Ohm).

Pentru a detemina forma globală a legii conducţiei se consideră un tub de curent, mărginit de o suprafaţă laterală S_l, pe care densitatea de curent $\mathbf{J}$ este orientată tangenţial şi două suprafeţe externe S_1 şi S_2 pe care intensitatea câmpului electric este orientată perpendicular (fig. 2.26).

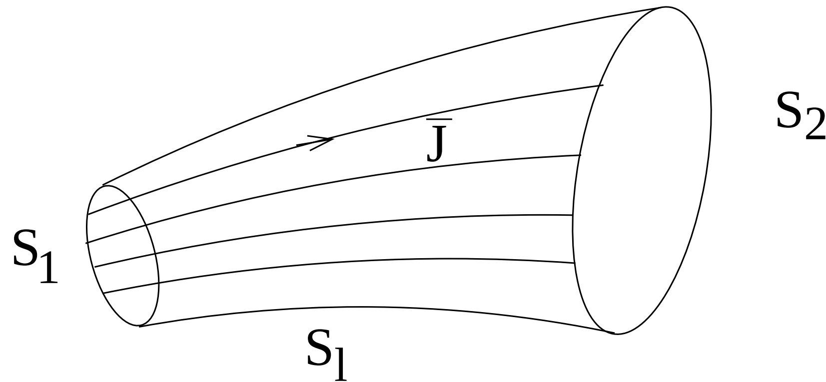


Figura 2.26: Tubul de curent

În regim staţionar tensiunea electrică de-a lungul tubului de flux:

$$u = \int_{C_{12}} \mathbf{E}\, d\mathbf{r} \tag{2.136}$$

nu depinde de forma curbei C_{12}, dacă punctele extreme ale acesteia P_1 şi P_2 aparţin suprafeţei S_1 şi respectiv S_2.

O altă mărime caracteristică tubului de curent în regim staţionar este intensitatea curentului electric:

$$i = \int_S \mathbf{J}\, d\mathbf{A} \tag{2.137}$$

ce străbate o suprafaţă transversală a tubului.

În regim staţionar $rot\,\mathbf{H} = \mathbf{J}$, de unde rezultă că $div\,\mathbf{J} = 0$, deci:

$$\int_\Sigma \mathbf{J}\, d\mathbf{A} = \int_{D_\Sigma} div\,\mathbf{J}\, d\mathbf{v} = \mathbf{0}, \tag{2.138}$$

ceea ce asigură independenţa curentului faţă de secţiunea transversală considerată.

În cazul mediilor conductoare liniare, relaţia de proporţionalitate $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ se reflectă la nivel global conform următoarei teoreme.

În regim staţionar, intensitatea curentului electric al unui tub de curent ce ocupă un mediu conductor liniar este proporţională cu tensiunea electrică de-a lungul tubului:

$$i = G \cdot u. \tag{2.139}$$

Constanta de proporţionalitate G, specifică tubului de flux, dar independentă de starea electrică a acestuia se numeşte conductanţă electrică. În cazul conductoarelor liniare, izotrope şi omogene conductanţa electrică este proporţională cu conductivitatea σ a mediului:

$$G = \sigma \cdot \Lambda, \tag{2.140}$$

în care Λ este permeanţa geometrică a tubului de flux.

Aplicaţii

1. Conductanţa unui tub de curent în câmp electric uniform.

   Se consideră un tub de curent de formă cilindircă având aria bazei A şi înălţime l. Tensiunea electrică:

   $$u = \int_{C_{12}} \mathbf{E}\, d\mathbf{r} = \mathbf{E}\,\mathbf{l}, \tag{2.141}$$

   şi intensitatea curentului:

   $$i = \int_S \mathbf{J}\, d\mathbf{A} = JA \tag{2.142}$$

   permit calculul conductanţei tubului de curent:

   $$G = \frac{i}{u} = \frac{JA}{E\,l} = \frac{\sigma A}{l}, \tag{2.143}$$

   în funcţie de conductivitatea σ a mediului.

2. Relaţia dintre tensiune şi curent la un tub de curent cu câmp electric imprimat.

   Se consideră un tub de curent cilindric de înălţime h şi aria bazei A, în care există un câmp electric imprimat uniform orientat longitudinal E_i.

   Relatia de material $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$ proiectată pe axa cilindrului, capătă forma $J = \sigma(E+E_i)$, în condiţiile în care câmpurile $\mathbf{J}$, $\mathbf{E}$ şi $\mathbf{E}_i$ sunt continue şi orientate paralel. În regim staţionar tensiunea electrică longitudinală este:

$$u = \int_{C_{12}} \mathbf{E}\, d\mathbf{R} = E\, l, \tag{2.144}$$

   iar intensitatea curentului electric este:

$$i = \int_{S} \mathbf{J}\, d\mathbf{A} = JA. \tag{2.145}$$

   În consecinţă, din relaţia de material rezultă:

$$\frac{i}{A} = \sigma(\frac{u}{l} + E_i), \tag{2.146}$$

   sau luând în considerare conductanţa tubului de curent în câmp uniform, rezultă:

$$i = G\, u + j_0 \tag{2.147}$$

   în care $j_0 = \sigma\, AE_i$ poartă numele de curent electric imprimat.

   Tensiunea electrică de-a lungul tubului de curent este:

$$u = \frac{1}{G}(i - j_0) \tag{2.148}$$

   sau folosind notaţiile $R = 1/G$ pentru mărimea numită rezistenţă tubului de curent şi $e = \int_{C_{12}} \mathbf{E}\, d\mathbf{r} = \mathbf{E}\, \mathbf{l} = \mathbf{j_0}/\mathbf{G}$ pentru marimea numită tensiunea lectromotoare imprimată, rezultă:

$$u = Ri - e \tag{2.149}$$

   relaţie cunoscută sub numele de teorema lui Joubert.

2.8 Clasificarea mediilor din punctul de vedere al legilor de material

Din punctul de vedere al legilor de material corpurile se clasifică în liniare sau neliniare, izotrope sau anizotrope şi cu sau fără efect de ereditate (postefect sau histerezis). Un corp este omogen în cazul în care are aceleaşi propietăţi de material în toate punctele sale. În caz contrar el este neomogen.

Cel mai simplu model de material este întâlnit în cazul corpurilor omogene, liniare, izotrope fără efecte de ereditate. În acest caz:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t)=\varepsilon\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t),\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mu\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r},t),\ \mathbf{J}(\mathbf{r},t)=\sigma\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t), \tag{2.150}$$

corpurile fiind caracterizate de trei constante de material ε, μ şi σ, care sunt mărimi reale şi pozitive, independente de punct şi de starea electromagnetică a corpului prezentă sau trecută. Fiind izotrope, în aceste corpuri nu există direcţii privilegiate relaţiile de material având aceeaşi formă indiferent de direcţia câmpului. Din această categorie fac parte gazele, lichidele si majoritatea corpurilor solide omogene, ca de exemplu metalele neferomagnetice.

În cazul corpurilor liniare, izotrope şi fără efect de ereditate, dar neomogene, constantele de material ε, μ sau σ au tot caracter scalar, dar variază de la un punct la altul:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r},t) &= \varepsilon(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t);\\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mu(\mathbf{r})\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r},t);\\ \mathbf{J}(\mathbf{r},t) &= \sigma(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t).\end{aligned} \tag{2.151}$$

În cazul mediilor liniar şi anizotrope:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r},t) &= \overline{\overline{\varepsilon}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t);\\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \overline{\overline{\mu}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r},t);\\ \mathbf{J}(\mathbf{r},t) &= \overline{\overline{\sigma}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t);\end{aligned} \tag{2.152}$$

relaţia de material este exprimată prin folosirea tensorilor de ordin doi. În cazul mediilor omogene aceşti tensori au un caracter independent de vectorul de poziţie.

Dintre mediile neliniare, cea mai simplă relaţie de material are loc în mediile cu caracteristică afină:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r},t) &= \varepsilon\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\mathbf{P}_p(\mathbf{r});\\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mu\cdot(\mathbf{H}(\mathbf{r},t)+\mathbf{M}_p(\mathbf{r}));\\ \mathbf{J}(\mathbf{r},t) &= \sigma\cdot(\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\mathbf{E}_i(\mathbf{r})).\end{aligned} \tag{2.153}$$

În cazul mediilor neliniare, izotrope şi omogene, proprietăţile de material pot fi caracterizate complet de funcţiile reale (monotone şi impare):

$$\begin{aligned}D(\mathbf{r},t) &= \hat{D}(E(\mathbf{r},t));\\ B(\mathbf{r},t) &= \hat{B}(H(\mathbf{r},t));\\ J(\mathbf{r},t) &= \hat{J}(E(\mathbf{r},t)).\end{aligned} \tag{2.154}$$

În cazul mediilor neliniare, izotrope şi neomogene aceste funcţii au ca parametru şi vectorul de poziţie:

$$\begin{aligned}D(\mathbf{r},t) &= \hat{D}(E(\mathbf{r},t),\mathbf{r});\\ B(\mathbf{r},t) &= \hat{B}(H(\mathbf{r},t),\mathbf{r});\\ J(\mathbf{r},t) &= \hat{J}(E(\mathbf{r},t),\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{2.155}$$

urmând ca în cazul mediilor anizotrope, relaţia de material să fie caracterizată prin funcţii vectoriale de variabilă vectorială:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r},t) &= \hat{D}(\mathbf{E}(\mathbf{r},t),\mathbf{r}); \\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \hat{B}(\mathbf{H}(\mathbf{r},t),\mathbf{r}); \\ \mathbf{J}(\mathbf{r},t) &= \hat{J}(\mathbf{E}(\mathbf{r},t),\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{2.156}$$

Aceste clasificări pot fi făcute în mod independent din punct de vedere dielectric, magnetic sau al conducţiei. De exemplu, fierul pur este liniar din punct de vedere dielectric şi al conducţiei dar neliniar din punct de vedere magnetic:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r},t) &= \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t); \\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{B}(H(\mathbf{r},t) \cdot \frac{\mathbf{H}(\mathbf{r},t)}{H(\mathbf{r},t)}; \\ \mathbf{J}(\mathbf{r},t) &= \sigma \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t). \end{aligned} \tag{2.157}$$

Ca toate metalele şi fierul nu se polarizează, deci are permitivitate relativă unitară.

2.9 Legea transferării energiei în conductoare

Cele patru legi generale împreună cu cele trei legi de material, anterior prezentate alcătuiesc un sistem complet de ecuaţii care permit determinarea univocă a câmpului electromagnetic ($\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{J}, \mathbf{H}$ şi ρ). În ingineria electrică, cunoşterea câmpului electromagnetic este necesară dar nu suficientă pentru aplicaţiile practice, în care interesează mai ales determinarea efectelor acestui câmp. Din acest punct de vedere cele şapte legi formează un sistem cu complectitudine internă, matematică, dar ele nu asigură complectitudinea fizică, deoarece nici una din aceste legi nu se referă la efectele neelectrice ale câmpului electromagnetic.

Pentru a asigura complectitudinea fizică a sistemului legilor este necesară adăugarea de relaţii noi, care să permită conexiunea electromagnetismului cu celelalte ramuri ale fizicii. Legile prezentate în continuare asigură această conexiune, permiţând determinarea efectelor mecanice, termice sau de transfer de masă specifice câmpului electromagnetic.

Legea transferării energiei în conductoare descrie transferul energetic între câmpul electromagnetic şi corpuri, în procesul de conducţie.

Enunţul legii transferării energiei

Densitatea de volum a puterii transferate de câmpul electromagnetic corpurilor în procesul de conducţie este egală cu produsul scalar dintre densitatea curentului electric şi intensitatea câmpului electric:

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \tag{2.158}$$

Densitatea de volum a puterii este o mărime scalară, măsurată in W/m^3, ce caracterizează local şi temporal transferul de energie, definită prin:

$$p = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta V} \, cu \, \Delta P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t}, \tag{2.159}$$

în care ΔW reprezintă energia transferată în intervalul de timp Δt volumului ΔV.

Densitatea de volum a puterii are sensul convenţional de câmp spre corp. Dacă $p > 0$ transferul are loc în sensul convenţional, iar în cazul $p < 0$ transferul real de energie are loc în sens invers celui convenţional, respectiv corpul este cel care transferă energie câmpului. În cazul $p = 0$ nu are loc transfer de energie între cele două sisteme (situaţie întâlnită în mediile supraconductoare, la care $\mathbf{E} = 0$, în mediile izolante la care $\mathbf{J} = 0$, sau în absenţa conducţie).

Consecinţele legii transferării

1. În cazul mediilor conductoare liniare.

   Dacă mediul conductor este izotrop $\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E}$, densitatea de putere are expresia:

   $$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma \cdot E^2 \geq 0, \tag{2.160}$$

   care evidenţiază caracterul pozitiv al acestuia. Folosind rezistivitatea ρ se obţine aceeaşi concluzie:

   $$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \rho \cdot J^2 \geq 0, \tag{2.161}$$

   indiferent de orientarea vectorilor $\mathbf{E}$ sau $\mathbf{J}$.

   În cazul conductoarelor anizotrope:

   $$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \overline{\overline{\sigma}} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{J} \cdot \overline{\overline{\rho}} \cdot \mathbf{J} \geq 0, \tag{2.162}$$

   ceea ce evidenţiază caracterul pozitiv definit de tensorii $\overline{\overline{\sigma}}$ şi $\overline{\overline{\rho}}$.

   În consecinţă, în mediile conductoare transferul de energie are un caracter ireversibil, având loc de la câmp spre corp. Energia primită de corp în fenomenul de conducţie duce la creşterea temperaturii sale, fenomen cunoscut sub numele de efect electrocaloric Joule-Lentz.

2. În cazul mediilor conductoare cu câmp imprimat.

   Folosind relaţia de legătură $\mathbf{J} = \sigma \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$, rezultă:

   $$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 + \sigma \mathbf{E}\mathbf{E}_i, \tag{2.163}$$

   iar în cazul în care se exprimă $\mathbf{E} = \rho\mathbf{J} - \mathbf{E}_i$, în funcţie de $\mathbf{E}$, rezultă:

   $$p = \rho J^2 - \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}. \tag{2.164}$$

Se constată că densitatea de putere se descompune într-o sumă de doi termeni, din care primul este pozitiv definit, reprezentând puterea transferată ireversibil corpurilor prin efectul Joule-Lentz:

$$p_J = \rho \cdot J^2 \geq 0 \tag{2.165}$$

şi al doilea termen, datorită câmpului electric imprimat:

$$p_i = -\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J} \tag{2.166}$$

al cărui semn depinde de orientarea densităţii de curent $\mathbf{J}$ faţa de $\mathbf{E}_i$, deci reprezintă un transfer energetic eventual reversibil. Sensul transferului este dat de sensul curentului.

De exemplu, în cazul unui acumulator electrochimic, la care densitatea de curent $\mathbf{J}$ are acelaşi semn cu $\mathbf{E}_i$, termenul $p_i < 0$, ceea ce evidenţiază că acumulatorul se descarcă, câmpul electromagnetic (curentul electric) primind energie de la corp (acumulator). Dacă se schimbă sensul curentului prin acumulator, atunci $p_i > 0$ şi acumulatorul se încarcă (corpul este cel care primeşte energie de la câmp). Indiferent de sensul transferului, acesta este însoţit de efectul ireversibil Joule-Lentz, ceea ce explică randamentul subunitar al acumulatorilor.

Deoarece, în general $\sigma E^2 \neq \rho J^2$ şi densitatea de putere transferată corpului prin intermediul câmpului imprimat are expresia $p_i = -\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}$, rezultă că puterea transferată prin efect Joule-Lentz are expresia $p_J = \rho J^2$ în cazul mediilor izotrope şi $p_J = \mathbf{J}\overline{\overline{\rho}}\mathbf{J}$ în cazul mediilor anizotrope.

Forma globală a legii transferării energiei

Puterea electrică transferată unui domeniu D_Σ se obţine prin integrarea densităţii de volum a puterii:

$$P = \int_{D_\Sigma} p \cdot dv = \int_{D_\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv, \tag{2.167}$$

iar energia transferată într-un interval de timp (t_1, t_2) este:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P dv = \int_{t_1}^{t_2} \int_{D_\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dt. \tag{2.168}$$

În cazul unui tub de curent, în regim staţionar, parcurs de curentul $i = I$ şi cu tensiunea $u = U$ la borne sunt valabile relaţiile $\mathbf{E} = grad\, V$ şi $rot\, \mathbf{H} = \mathbf{J}$, ceea ce implică $div\, \mathbf{J} = 0$, iar folosind egalitatea:

$$div(\mathbf{J} \cdot V) = V \cdot div\, \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot grad\, V = \mathbf{J} grad\, V \tag{2.169}$$

se obţine:

$$P = \int_{D_\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv = -\int_{D_\Sigma} \mathbf{J} \cdot grad\, V dv = -\int_{\Sigma} \mathbf{J} V d\mathbf{A}. \tag{2.170}$$

Deoarece pe frontiera tubului de curent $\Sigma = S_l \cup S_1 \cup S_2$ sunt îndeplinite condiţiile $\mathbf{J}d\mathbf{A} = 0$ pe S_l, $V = V_1$ pe S_1 şi $V = V_2$ pe S_2, rezultă:

$$P = -V_1 \cdot \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} - V_2 \cdot \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = i(V_1 - V_2) = u \cdot i \tag{2.171}$$

S-a ţinut cont că elementul de arie de pe suprafaţa S_1 este orientat spre exterior şi nu în concordanţă cu sensul de referinţă al curentului, deci $d\mathbf{A} = -d\mathbf{A}_1$ pe S_1, dar $d\mathbf{A} = d\mathbf{A}_2$ pe S_2.

În consecinţă se poate afirma că, puterea transferată de câmpul electromagnetic unui tub de curent în regim staţionar este egală cu produsul dintre tensiunea de-a lungul tubului şi intensitatea curentului ce străbate tubul.

$$P = ui \tag{2.172}$$

În demonstrarea acestei afirmaţii nu s-a folosit nici o ipoteză a supra relaţiei de material din interiorul conductorului. În cazul conductoarelor liniare expresia puterii transferate tubului de curent în regim staţionar are una din formele:

$$P = u \cdot i = G \cdot u^2 = R \cdot i^2 \geq 0 \tag{2.173}$$

în care $R = 1/G$. Fiind transferată ireversibil acesta se numeşte putere disipată.

În cazul unui tub de curent cu câmp imprimat $u = R \cdot i - e$, ceea ce determină puterea:

$$P = u \cdot i = R \cdot i^2 - e \cdot i, \tag{2.174}$$

în care se separă termenul pozitiv definit $R \cdot i^2$, caracteristic efectului Joule-Lentz şi termenul $e \cdot i$, caracteristic câmpului imprimat, care reprezintă puterea transferată eventual corpurilor, într-un proces reversibil.

2.10 Legea transferului de masă

Un alt efect ce însoţeşte procesul de conducţie este transferul de masă în interiorul corpurilor conductoare. Acest efect este caracterizat de legea transferului de masă, cunoscută mai ales sub numele de legea electrolizei.

Enunţul legii transferului de masă

În interiorul corpurilor conductoare, procesul de conducţie este insoţit de un transfer de masă caracterizat de o densitate a fluxului de masă proporţională şi coliniară cu densitatea de curent:

$$\delta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{J} \tag{2.175}$$

Constanta de proporţionalitate k are valori dependente de natura materialului conductor. În cazul metalelor valoarea acestei constante este practic nulă, dar în cazul electroliţilor ea este egală cu constanta electrochimică:

$$k = \begin{cases} 0 & \text{la metale;} \\ A/F_0 z & \text{la electroliţi,} \end{cases} \tag{2.176}$$

în care A este masa atomică a ionului disociat, z este valenţa sa, iar $F_0 = 96490\text{C}$ este constanta lui Faraday. Spre deosebire de metale, în cazul electroliţilor procesul de conducţie este însoţit de reacţii chimice, fenomen cunoscut sub numele de electroliză.

Pentru caracterizarea transferului de masă se utilizează mărimea vectorială numită densitatea fluxului de masă măsurată în Kg/m^2s, definită de relaţia:

$$\delta = \mathbf{n} \cdot \lim_{\mathbf{\Delta A \to 0, \Delta t = 0}} \frac{\mathbf{\Delta m}}{\mathbf{\Delta A \cdot \Delta t}} \tag{2.177}$$

în care Δm este masa transferată prin aria ΔA în intervalul de timp Δt, iar $\mathbf{n}$ este un versor normal pe suprafaţa de arie ΔA, a cărui orientare este aleasă astfel încât să asigure valoarea maximă proiecţiei $\mathbf{n} \cdot \overline{\delta}$.

Interpretarea microscopică a legii transferului de masă

Fenomenul de conducţie constă în deplasarea ordonată a purtătorilor liberi de sarcină (electroni sau ioni) din interiorul conductoarelor, deplasare suprapusă peste mişcarea dezordonată de agitaţie termică. Deoarece toate microparticulele purtătoare de sarcină electrică din interiorul conductorului au masă proprie (de repaus) nenulă, rezultă că deplasarea ordonată a acestora este în mod necesar însoţită de un transfer de masă, transfer ale cărui direcţie şi sens sunt date de deplasarea purtătorilor de sarcină.

În cazul metalelor, deoarece masa electronilor liberi care asigură conducţia este mult mai mică decât cea a restului microparticulelor ce alcătuiesc corpul, iar viteza lor vectorială medie are valori mici, pentru densităţi uzuale de curent, transferul de masă are valori nesemnificative. În schimb, în cazul electroliţilor, deoarece fenomenul de conducţie este asigurat de deplasarea ionilor, transferul de masă are valori mult mai importante.

Forma globală a legii electrolozei

Pentru determinarea formei globale se consideră o cuvă electrolitică, alcătuită din doi conductori metalici scufudaţi într-un electrolit lichid (figura 2.27).

Aplicând între cei doi electrozi o tensiune electrică, atât electrozii cât şi electolitul vor fi străbătuţi de curent electric. Deoarece în electrolit transferul de masă are valori apreciabile, iar în electrozi acesta este practic nul, rezultă că pe suprafaţa acestora apare o depunere de substanţă, cu debitul masic:

$$Q_m = \int_S \overline{\delta}\, d\mathbf{A} = \int_S k \cdot \mathbf{J}\, d\mathbf{A}, \tag{2.178}$$

în care S este suprafaţa unui electrod (electrodul polarizat pozitiv - anodul, atunci când interesează depunerea metalică) scufundată în electrolit.

Pentru a calcula masa depusă se integrează debitul masic în timp:

$$m = \int_{t_1}^{t_2} Q_m\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_S k \cdot \mathbf{J}\, d\mathbf{A}\, dt, \tag{2.179}$$

pe intervalul de timp (t_1, t_2) cât durează procesul.

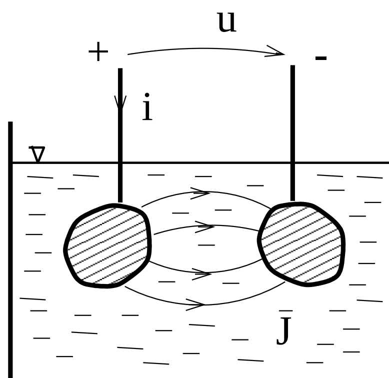


Figura 2.27: Cuva electrolitică

În condiţiile în care electrolitul este omogen, debitul masic devine:

$$Q_m = k \int_S \mathbf{J}\, d\mathbf{A} = k \cdot i \tag{2.180}$$

în care i este intensitatea curentului care străbate cuva, iar dacă acest curent este constant în timp, $i = I$, atunci:

$$m = \int_{t_1}^{t_2} k \cdot i\, dt = k \cdot I(t_2 - t_1) = k \cdot I \cdot t. \tag{2.181}$$

În consecinţă, legea electrolizei are următorul enunţ în formă globală:*masa depusă prin electroliză este proporţională cu intensitatea curentului ce străbate cuva şi cu timpul cât durează procesul, constanta de proportionalitate fiind egală cu constanta electrochimică ($k = A\ z \cdot F_0$) a elementului depus.*

Se constată că forma globală a legii se referă la masa totală depusă, fără să dea indicaţii asupra locului în care are loc depunerea şi implicit asupra grosimii şi uniformităţii stratului depus. Din acest motiv ea are un caracter particular, faţă de forma locală care evidenţiază că grosimea stratului depus este proporţională cu densitatea de curent de la suprafaţa electrodului.

Aplicaţie la lege transferului de masă:

Se consideră o soluţie apoasă de azotat de argint în care sunt scufundaţi doi electrozi parcurşi de un curent cu intensitatea $I = 1A$. Masa de argint depusă într-o secundă este:

$$m = k \cdot I \cdot t = \frac{A}{z \cdot F_0} I \cdot t = \frac{107.7}{96490} = 1.1186 \cdot 10^{-3}\mathrm{Kg} = 1118,6\,\mathrm{mg}. \tag{2.182}$$

Această valoare a fost folosită o vreme pentru definiţia unitaţii de măsură a intensitaţii curentului electric, şi a fost numită Amper internaţional.

2.11 Sistemul legilor câmpului electromagnetic

Cele nouă legi ale câmpului electromagnetic se împart în trei mari categorii: legi generale, legi de material şi legi de conexiune.

Legile generale în număr de patru sunt două de stare (legea fluxului electric şi cea a fluxului magnetic, care nu conţin derivate faţă de timp) şi două de evoluţie (legea inducţiei şi legea circuitului magnetic, care evidenţiază derivata faţă de timp a tensiunii electrice şi respectiv a tensiunii magnetice pe curbe închise).

Legile de material, în număr de trei, evidenţiază legătura care există între mărimile locale caracteristice ale câmpului electric (între inducţie şi intensitatea câmpului electric), ale câmpului magnetic (între inducţie şi intensitatea câmpului magnetic) şi procesului de conducţie (între densitatea de curent şi intensitatea câmpului electric). Aceste legi caracterizează comportarea corpurilor în interacţiunea lor cu câmpul electromagnetic. În cazul mediilor cu efecte ereditare, legile de material au caracter de evoluţie, iar în caz contrar ele au un caracter de stare, asigurând o legătură independentă de evoluţia în timp a mărimilor.

Legile de conexiune, în număr de două, evidenţiază mărimi care nu sunt caracteristice numai câmpului electromagnetic, asigurând conexiuni între teoria electromagnetismului şi celelalte ramuri ale fizicii. Aceste legi permit determinarea efectelor câmpului electromagnetic în urma interacţiunii acestuia cu corpurile. Legea transformării energiei în conductoare are un caracter general, independent de natura corpurilor, iar legea electrolizei are un caracter de material, deoarece în enunţul ei intervin mărimi caracteristice mediilor în care aceasta se aplică. Ambele legi de conexiune au un caracter de stare.

Fiecare din legile câmpului electromagnetic au o formă globală (integrală) şi una locală, una din aceste forme fiind generală şi cealaltă particulară (dedusă din forma generală în anumite ipoteze restrictive). Legile generale ale câmpului electromagnetic au formă locală ca o formă particulară, cea globală având un caracter general. În schimb, legile de material şi cele de conexiune au form'ele global'e cu caracter particular, iar cele local'e cu caracter general.

Următoarele relaţii sintetizează diferitele forme ale legilor câmpului electromagnetic şi semnificaţiile acestora.

1. **Legea fluxului electric** (lege generală de stare)

   Forma globală: $\psi_\Sigma = q_{D_\Sigma}$;

   Forma integrală: $\int_\Sigma \mathbf{D}\, d\mathbf{A} = \int_{D_\Sigma} \rho\, dv$;

   Forma locală: $div\, \mathbf{D} = \rho$;

   Forma pe suprafeţe de discontinuitate: $div_s\, \mathbf{D} = \rho_s$.

   Semnificaţia fizică: corpurile electrizate produc în jurul lor câmp electric (cu linii deschise orientate de la sarcinile pozitive spre cele negative).

2. **Legea fluxului magnetic** (lege generală de stare)

   Forma globală: $\varphi_\Sigma = 0$;

   Forma integrală: $\int_\Sigma \mathbf{B}\, d\mathbf{A} = 0$;

   Forma locală: $div\, \mathbf{B} = 0$;

   Forma pe suprafeţe de discontinuitate: $div_s\, \mathbf{B} = 0$.

   Semnificaţia fizică: nu există sarcini magnetice (liniile câmpului magnetic sunt curbe închise).

3. **Legea inducţiei electromagnetice** (lege generală de evoluţie)

   Forma globală: $u_\Gamma = -\frac{d\varphi_{S_\Gamma}}{dt}$;

   Forma integrală dezvoltată: $\int_\Gamma \mathbf{E}\, d\mathbf{r} = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{A} - \int_\Gamma (\mathbf{B} \times \mathbf{v})\, \mathbf{dr}$;

   Forma locală: $rot\, \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{dt} - rot\, (\mathbf{B} \times \mathbf{v})$;

   Forma pe suprafeţe de discontinuitate: $rot_s\, \mathbf{E} = rot_s\, (\mathbf{B} \times \mathbf{v})$.

   Semnificaţie fizică: câmpul magnetic variabil în timp induce un câmp electric (liniile câmpului electric indus înconjoară liniile câmpului magnetic inductor). Fenomenul de inducţie se poate datora şi mişcării corpurilor în câmp magnetic.

4. **Legea circuitului magnetic** (lege generală de evoluţie)

   Forma globală: $u_{m_\Gamma} = i_{S_\Gamma} + \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt}$;

   Forma integrală dezvoltată: $\int_\Gamma \mathbf{H}\, d\mathbf{r} = \int_{S_\Gamma} (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho\, \mathbf{v}) \mathbf{dA} + \int_{\boldsymbol{\Gamma}} (\mathbf{D} \times \mathbf{v})$;

   Forma locală: $rot\, \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho\, \mathbf{v} + \mathbf{rot}\, (\mathbf{D} \times \mathbf{v})$;

   Forma pe suprafeţe de discontinuitate: $rot_s\, \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \rho_s\, \mathbf{v} + \mathbf{rot_s}\, (\mathbf{D} \times \mathbf{v})$.

   Semnificaţia fizică: corpurile în stare electrocinetică şi câmpul electric variabil în timp generează câmp magnetic (liniile acestuia sunt curbe închise care înconjoară curenţii sau liniile câmpului electric ce le-au produs). Câmpul magnetic apare datorită curentului de conducţie, dar şi datorită variaţiei propiu-zise a câmpului electric în mediile imobile (curent de deplasare), a mişcării corpurilor electrizate (curent de convecţie) sau deplasării corpurilor în câmp electric (curent Röntgen).

5. **Legea legăturii în câmp electric** (lege de material)

   Forma locală: $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$ sau $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_t(\mathbf{E}) + \mathbf{P}_p$;

   în particular: $\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\mathbf{E} + \mathbf{P}_p$;

Forma globală: $\psi = \Lambda_e \cdot u$.

Semnificaţie fizică: sub acţiunea câmpului electric mediile dielectrice se polarizează, urmând ca polarizaţia permanentă (electreţii) să reprezinte o cauză posibilă a câmpului electric. Câmpul electric este perturbat de prezenţa dielectricilor, liniile de câmp fiind concentrate în corpurile de mare permitivitate.

6. **Legea legăturii în câmp magnetic** (lege de material)

   Forma locală: $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$ sau $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}_t(\mathbf{H}) + \mathbf{M}_p)$;

   în particular: $\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}(\mathbf{H} + \mathbf{M}_p)$;

   Forma globală: $\varphi = \Lambda_m \cdot u_m$.

   Semnificaţie fizică: sub acţiunea câmpului electric, mediile se magnetizează, urmând ca magnetizaţia permanentă (magneţii permanenţi) să reprezinte o cauză posibilă a câmpului magnetic.

   Câmpul magnetic este perturbat de corpurile feromagnetice, liniile de câmp magnetic fiind concentrate şi dirijate de aceste corpuri.

7. **Legea conducţie** (lege de material)

   Forma locală: $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$;

   în particular: $\mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$;

   Forma globală: $i = G \cdot u$.

   Semnificaţia fizică: apariţia stării electrocinetice este determinată de prezenţa câmpului electric. Câmpul electric imprimat reprezintă o altă cauză posibilă a câmpului electric.

8. **Legea transferării energiei în conductoare** (lege generală de conexiune)

   Forma locală: $p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$;

   Forma globală: $P = u \cdot i$.

   Semnificaţie fizică: în procesul de conducţie are loc un transfer de energie între câmpul electromagnetic şi corpurile conductoare. Acest transfer are o componentă ireversibilă, de la câmp la corp, care determină încălzirea corpurilor în stare electrocinetică.

9. **Legea transferării masei** (lege de conexiune cu caracter de material)

   Forma locală: $\delta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}$;

Forma globală: $m = k \cdot I \cdot t$.

Semnificaţie fizică: procesul de conducţie este însoţit de transfer de masă.

Fenomenele menţionate în semnificaţiile fizice ale celor nouă legi reprezintă fenomenele fundamentale ale electromagnetismului.

Ecuaţiile lui Maxwell

Formele locale ale legilor câmpului electromagnetic în mediile imobile:

$$\begin{aligned} rot\,\mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \\ rot\,\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ div\,\mathbf{D} &= \rho; \\ div\,\mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \tag{2.183}$$

alcătuiesc un sistem de ecuaţii diferenţiale parţiale liniare şi de ordinul întâi, cunoscute sub nunele de ecuaţiile lui Maxwell. Dacă aceste ecuaţii se completează cu legile de material în medii liniare şi izotrope:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}; \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}; \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} \end{aligned} \tag{2.184}$$

se obţine un sistem de ecuaţii care determină univoc câmpul electromagnetic în condiţiile menţionate. Deoarece această soluţie există şi este unică, rezultă că sistemul legilor câmpului electromagnetic este necontradictoriu şi complet, din punct de vedere matematic.

Deoarece nici una din legile electromagnetismului nu poate fi determinată pornind de la celelalte, rezultă că sistemul de legi are un caracter independent. Completitudinea fizică a sistemului de legi prezentat este asigurată de faptul că practic toate fenomenele electromagnetice întâlnite în ingineria electrică pot fi explicate şi modelate matematic folosind acest sistem de ecuaţii.

Relaţiile impuse în medii imobile de legile câmpului electromagnetic între mărimile caracteristice ale acestui câmp sunt reprezentate grafic în figura 2.28:

Fiecare dependenţă cauză - efect a fost reprezentată printr-o săgeată pe care s-a marcat numărul legii ce evidenţiază acestă relaţie. Relaţiile de stare, existente atât în regim staţionar cât şi variabil au fost reprezentate prin săgeată dublă, iar relaţiile de evoluţie, caracteristice regimului dinamic au fost reprezentate printr-o săgeată simplă.

Relaţiile reprezentate evidenţiază cele trei cauze statice sau dinamice ale câmpului electric (polarizaţia permanentă $\mathbf{P}_p$, câmpul electric imprimat $\mathbf{E}_i$, şi

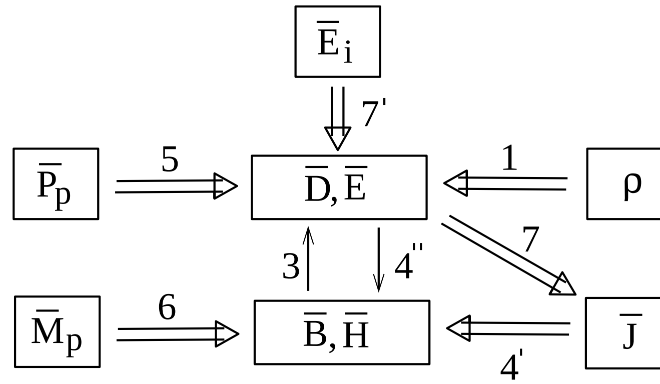


Figura 2.28: Reprezentarea schematică a fenomenelor fundamentale ale electromagnetismului

electrizarea ρ) şi cauza sa exclusiv dinamică (variaţia în timp a câmpului magnetic **B**). În timp ce câmpul magnetic are două cauze statice sau (magnetizaţia permanentă $\mathbf{M}_p$,curentul electric **J**) şi o cauză dinamică (variaţia în timp a câmpului electric **D**).

Regimurile câmpului electromagnetic

Se constată că variaţia în timp a câmpului electric generează câmp magnetic şi reciproc, variaţia în timp a câmpului magnetic generează câmp electric. În consecinţă, nu poate exista câmp electric variabil neînsoţit de câmp magnetic şi invers, ceea ce evidenţiază caracterul unitar al câmpului electromagnetic care este o singură entitate fizică. Caracterul ciclic al acestor relaţii, impus de legea inducţiei şi legea circuitului magnetic, evidenţiază faptul că în regim dinamic, câmpul electromagnetic, generat succesiv se poate se poate desprinde de corpurile care l-au produs, propagându-se inclusiv în vid. Acest fenomen specific **regimului dinamic, general variabil** poartă numele de *undă electromagnetică.*

Dacă variaţia câmplui electromagnetic este suficient de lentă în timp, fenomenul de propagare al undei electromagnetice este nesemnificativ. Această situaţie are loc, spre exemplu în conductoare masive, în care curentul de deplasare este mult mai mic decât cel de conducţie, iar relaţia $4'$ poate fi eliminată. Regimul câmpului electromagnetic în care curentul de deplasare este neglijabil, iar $rot\,\mathbf{H} = \mathbf{J}$ poartă numele de **regim cvasistaţionar inductiv** (figura 2.29 *a*). În acest regim, câmpul magnetic se calculează în funcţie de curentul electric, folosind relaţiile din regim staţionar. Deoarece fenomenul de inducţie electromagnetică joacă un rol fundamental în acest regim, câmpul magnetic variabil produs de curenţii de conducţie influenţează distribuţia câmpului electric şi implicit a curentului electric. În consecinţă, în regim cvasistaţionar inductiv, distribuţia cu-

rentului electric în conductoarele masive se deosebeşte de cea în regim staţionar, efect numit pelicular sau de refulare. Datorită efectului pelicular, curentul electric se distribuie de preferinţă pe suprafaţa conductoarelor şi mai puţin în miezul lor. Un alt efect specific regimului cvasistaţionar inductiv îl reprezintă curenţii turbionali, care constituie curenţii induşi în conductoarele masive introduse în câmp magnetic variabil. Datorită fenomenului de inducţie electromagnetică, în interiorul conductorului se generează un câmp electric, care pe baza legii conducţie produce curent electric. Prezenţa curentului indus modifică distribuţia câmpului magnetic, care se deosebeşte în acest regim de cea din regim staţionar. Se constată că şi în regim cvasistaţionar apare ca o relaţie ciclică. Dar spre deosebire de cazul general variabil, în care relatia $(3, 4")$ determină fenomenul de propagare (datorită caracterului hiperbolic al acestor ecuaţii cu derivate parţiale, viteza de propagare este finită), în cazul regimului cvasistaţionar relaţia ciclică $(7, 4', 3)$ reprezintă o ecuaţie cu derivate parţiale de tip parabolic, care determină un fenomen de difuzie a câmpului electromagnetic în interiorul conductorului (fără front de undă cu viteză de propagare finită).

În cazul corpurilor slab conductoare, în conditiile în care variaţia câmpului este suficient de lentă fenomenul de difuzie s câmpului electromagnetic poate fi descris neglijând fenomenul de inducţie electromagnetică şi considerând satisfăcută relaţia:

$$rot\,\mathbf{E} = 0, \tag{2.185}$$

specifică regimului staţionar. Acest regim poartă numele de **regimul cvasistaţionar capacitiv** al câmpului electromagnetic şi are relaţiile reprezentate în figura 2.29 *b*. Se constată că în acest regim câmpul magnetic nu influenţează distribuţia curentului electric şi respectiv a câmpului electric.

Un regim particular, interesant din punct de vedere practic este regimul staţionar (figura 2.30).

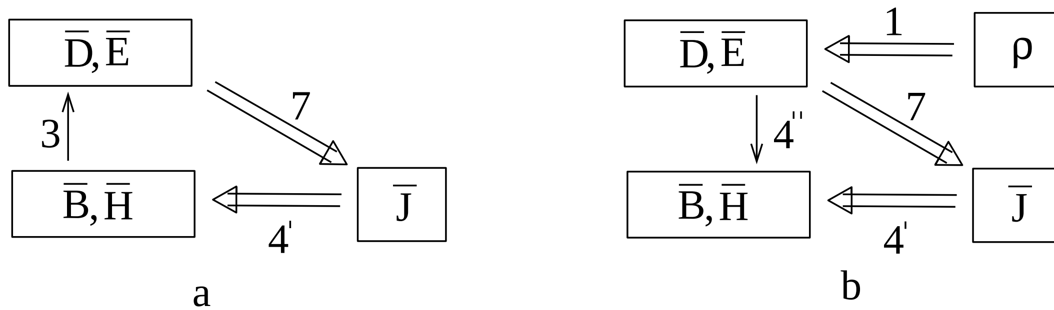


Figura 2.29: Reprezentarea schematică a fenomenelor în regimuri cvasistaţionare

În acest regim câmpul magnetic nu influenţează câmpul electric. În schimb câmpul electric este cel care determină curentul electric şi implicit câmpul magnetic. Dintre cele trei cauze ale câmpului electric ($\mathbf{P}_p$, $\mathbf{E}_i$ şi ρ), doar câmpul

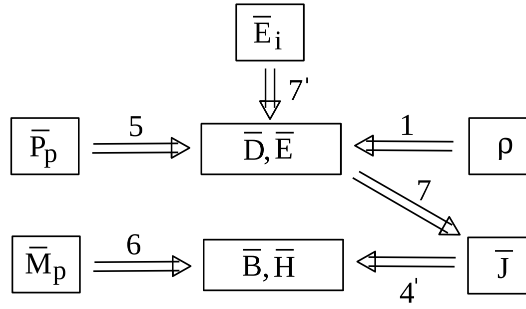


Figura 2.30: Regimul staţionar

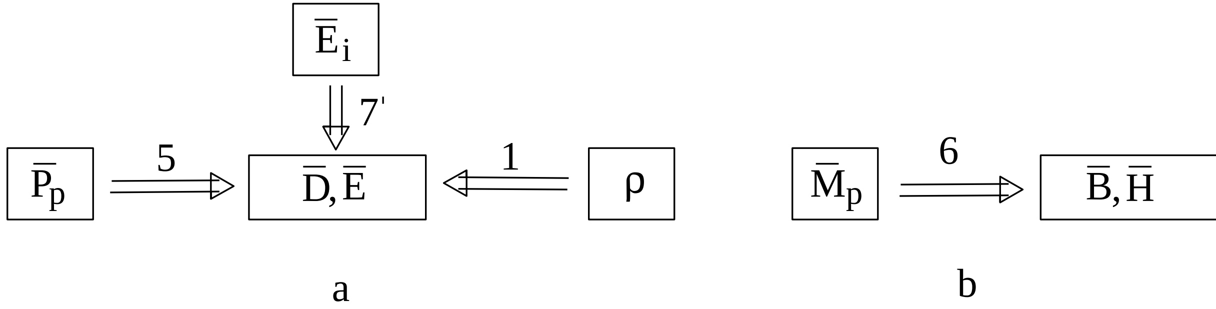


Figura 2.31: Regimuri statice

electric imprimat este capabil să determine curent electric de conducţie, deoarece estre singurul capabil să producă tensiune electromotare nenulă. În consecinţă, în regim staţionar se ridică două categorii de probleme. Una constă în determinarea distribuţiei curenţilor electrici şi implicit a câmpului electric în conductoare masive (relaţia 7) iar a doua se referă la determinarea repartiţiei câmpului magnetic (relatia $4'$). Prima categorie de probleme reprezintă obiectul **regimului electrocinetic staţionar** iar a doua reprezintă obiectul **regimului magnetic staţionar**.

O separare netă a câmpului magnetic de cel electric se obţine în cazul în care lipseşte procesul de conducţie ($J = 0$). În acest caz, deoarece nu au loc transformări de energie ($p = \mathbf{JE} = 0$) regimurile obţinute se numesc statice. Se constată că ecuaţiile câmpului electric, specifice **regimului electrostatic** (figura 2.31 *a*) sunt complet independente de ecuaţile câmpului magnetic, specifice **regimului magnetostatic** (figura 2.31 *b*).

În regim magnetostatic, cauzele câmpului magnetic se reduc la una singură şi anume $\mathbf{M}_p$, problema fundamentală a acestui regim fiind determinarea câmpului magnetic produs de magneţii permanenţi.

În regim electrostatic câmpul electric poate fi produs de corpurile electrizate (ρ), polarizate permanent ($\mathbf{P}_p \neq 0$) sau de câmpurile electrice imprimate ($\mathbf{E}_i$).

Capitolul 3

Teoremele fundamentale ale electromagnetismului. Bazele fizice ale teoriei circuitelor electrice

3.1 Teorema conservării sarcinii electrice

Enunţul teoremei conservării sarcinii

Intensitatea curentului electric ce părăseşte orice suprafaţă închisă Σ este egală cu viteza de scădere a sarcinii electrice din domeniul D_Σ închis de acea suprafaţă:

$$i_\Sigma = -\frac{dq_{D_\Sigma}}{dt}, \tag{3.1}$$

sau explicit:

$$\int_\Sigma \mathbf{J} d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt}\int_{D_\Sigma} \rho dv. \tag{3.2}$$

Datorită caracterului ei general, această afirmaţie este cunoscută şi sub numele de legea conservării sarcinii.

În teoria Maxwell-Hertz suprafaţa Σ este antrenată de corpuri în mişcarea lor.

Demonstraţia teoremei conservării sarcinii

Se consideră o suprafaţă deschisă S_Γ, care se sprijină pe curba închisă Γ. Legea circuitului magnetic aplicată pe această curbă este:

$$u_{m\Gamma} = i_{S_\Gamma} + \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt}. \tag{3.3}$$

Dacă diametrul curbei Γ tinde către zero, aceasta se reduce la un punct P, iar suprafaţa deschisă S_Γ tinde către o suprafaţă închisă Σ, cu $P \in \Sigma$ (figura 3.1).

Tensiunea magnetică pe curba Γ:

$$u_{m_\Gamma} = \int_\Gamma \mathbf{H} d\mathbf{r} = H_{tmed} \cdot l_\Gamma \tag{3.4}$$

tinde spre zero, deoarece l_Γ se anulează. În consecinţă, deoarece $S_\Gamma \to \Sigma$, din legea circuitului magnetic rezultă:

$$i_\Sigma + \frac{d\psi_\Sigma}{dt} = 0. \tag{3.5}$$

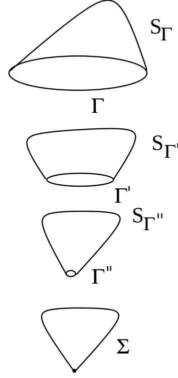


Figura 3.1: Referitoare la teorema conservării sarcinii

Deoarece fluxul electric ψ_Σ, pe orice suprafaţă închisă este egal cu sarcina electrică q_{D_Σ}, din domeniul mărginit de acesta, conform legii fluxului electric, rezultă:

$$i_\Sigma + \frac{dq_{D_\Sigma}}{dt} = 0, \tag{3.6}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Forma locală cu teoremei conservării sarcinii electrice

Pornind de la forma locală a legii circuitului magnetic:

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho\mathbf{v} + \mathbf{rot}(\mathbf{D} \times \mathbf{v}), \tag{3.7}$$

şi aplicând acestei egalităţi vectoriale operatorul diferenţial divergenţă, rezultă:

$$div\mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}(div\mathbf{D}) + div(\rho\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \tag{3.8}$$

deoarece $div(\text{rot } \mathbf{G}) = 0$ pentru orice câmp $\mathbf{G}$ suficient de neted. Pe baza formei locale a legii fluxului electric, $div\mathbf{D} = \rho$, deci:

$$div\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} - div(\rho\mathbf{v}), \tag{3.9}$$

care este forma locală a teoremei conservării sarcinii electrice, în medii mobile. Deoarece $\mathbf{J}_v = \rho\mathbf{v}$ reprezintă densitatea curentului de convecţie, această relaţie se poate scrie sub forma

$$div(\mathbf{J} + \mathbf{J}_v) = \frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{3.10}$$

În cazul mediilor imobile ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$), rezultă:

$$div\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{3.11}$$

Integrând această relaţie pe un domeniu D_Σ, rezultă pe baza teoremei Gauss-Ostrogradski:

$$\int_\Sigma (\mathbf{J} + \rho\mathbf{v})\mathbf{dA} = \int_{\mathbf{D}_\mathbf{\Sigma}} \frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{t}}\mathbf{dv}, \tag{3.12}$$

care este forma integrală dezvoltată a teoremei.

Spre deosebire de forma globală, în forma integrală dezvoltată, suprafaţa Σ nu este antrenată de corpuri în mişcarea lor.

Forma pe suprafeţe de discontinuitate a teoremei conservării sarcinii electrice

Se consideră două domenii $\mathcal{D}_\infty$ şi $\mathcal{D}_\in$ în interiorul cărora mărimile caracteristice cămpului electromagnetic sunt funcţii continue de punct, condiţie care nu este în mod necesar satisfăcută pe suprafaţa de separaţie S_d dintre cele două medii. Presupunând că suprafaţa de discontinuitate este suficient de netedă, astfel încât să aibă normală unică şi că în fiecare punct se poate defini pentru orice $P \in S_d$ o pereche de vectori $\mathbf{J}_1$ şi $\mathbf{J}_2$ care reprezintă limitele densităţii de curent, dinspre domeniul $\mathcal{D}_\infty$ şi respectiv $\mathcal{D}_\in$ (figura 3.2).

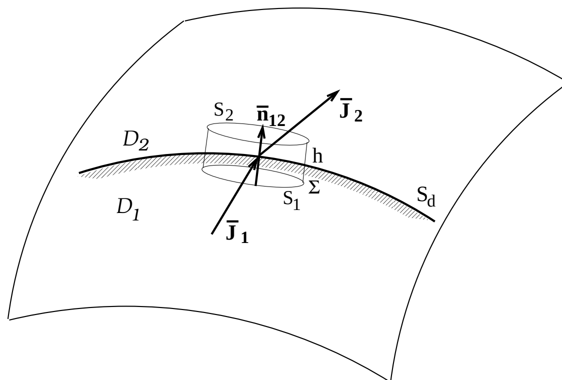


Figura 3.2: Suprafaţa de discontinuitate pentru curent

Pentru început se va presupune că suprafaţa S_d este electrizată cu densitatea superficială de sarcină ρ_s, dar cu densitate superficială de curent nulă, iar mediile sunt imobile. Punctul P se consideră centrul unui cilindru Σ de înalţime h şi

aria barei A, orientat cu axa după normala $\mathbf{n_{12}}$. Separând suprafeţele bazelor S_1 şi S_2 de suprafaţa laterală a cilindrului S_l se obţine intensitatea curentului ce părăseşte suprafaţa $\Sigma = S_l \cup S_1 \cup S_2$:

$$i_\Sigma = \int_\Sigma \mathbf{J} d\mathbf{A} = J_{nmed} hl - J_{1nmed} A + J_{2nmed} A, \tag{3.13}$$

în care l este perimetrul bazei. Sarcina electrică din domeniul D_Σ este:

$$\int_{D_\Sigma} \rho dv = \rho_{vmed} Ah + \rho_{smed} A. \tag{3.14}$$

Aplicând forma integrală dezvoltată a teoremei se obţine:

$$J_{nmed} \frac{hl}{A} + J_{2nmed} - J_{nmed} = \frac{d}{dt} \rho_{vmed} h - \frac{d\rho_{smed}}{dt} \tag{3.15}$$

relaţie care pentru $h \to 0$ devine $J_{2nmed} - J_{1nmed} = \frac{d\rho_{smed}}{dt}$, iar considerând ulterior că $A \to 0$, rezultă:

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}, \tag{3.16}$$

sau sub formă compactă:

$$div_s \mathbf{J} = \frac{\partial \rho_s}{\partial t} \tag{3.17}$$

în care s-a folosit notaţia $div_s \mathbf{J} = \mathbf{n}_{12}(\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1)$, cu referire la saltul componentei normale a densităţii de curent.

În cazul particular în care $J_s = 0$, rezultă:

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = 0, \qquad div_s \mathbf{J} = 0, \tag{3.18}$$

ceea ce garantează conservarea componentelor normale ale densităţii de curent $J_{n1} = J_{n2}$ la trecere prin suprafaţa de deschidere.

În condiţiile în care suprafaţa de discontinuitate S_d este străbătută de curent de conducţie distribuit superficial, cu densitatea $\mathbf{J}_s$, curentul pe suprafaţa laterală S_Γ nu se anulează, atununci când $h \to 0$:

$$\int_{S_\Gamma} \mathbf{J} d\mathbf{A} = J_{nmed} hl + \int_{\Gamma = \Sigma \cap S_d} \mathbf{J}_s \mathbf{n} dl. \tag{3.19}$$

Suprafaţa de discontinuitate S_d poate fi descrisă folosind ecuaţia parametrică $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\lambda, \mu)$, fiecare punct $P \in S_d$ fiind caracterizat de perechea de coordonate locale (λ, μ). Aplicând teorema Gauss-Ostrogradski, cu referire la curba închisă Γ, rezultă:

$$\int_{\Gamma = \Sigma \cap S_d} \mathbf{J}_s \mathbf{a} dl = \int_{S_\Gamma = D_\Sigma \cap S_d} div_2 \mathbf{J}_s dA = (div_2 \mathbf{J}_s)_{med} A, \tag{3.20}$$

în care:

$$div_2\mathbf{J}_s = \frac{1}{h_\lambda h_\mu}[\frac{\partial}{\partial\lambda}(h_\mu J_\lambda) + \frac{\partial}{\partial\mu}(h_\lambda J_\mu)], \quad (3.21)$$

unde h_λ şi h_μ sunt parametrii Lamé asociaţi parametrilor λ şi μ. În particular, în cazul în care suprafaţa S_d este plană şi orientată spre exemplu paralel cu planul $z = 0$, se pot utiliza coordonatele carteziene iar divergenţa bidimensională devine:

$$div_2\mathbf{J}_S = \frac{\partial J_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial J_{sy}}{\partial y}. \quad (3.22)$$

Aplicând teorema conservării sarcinii, rezultă în acest caz:

$$J_{nmed}\frac{hl}{P} + J_{2nmed} - J_{1nmed} + (div_2\mathbf{J}_s)_{med} = \frac{d\rho_{vmed}}{dt}h - \frac{d\rho_{smed}}{dt} \quad (3.23)$$

Trecând de limită, pentru $h \to 0$ şi $A \to 0$, astfel încât $h/A \to 0$ se obţine:

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) + div_2\mathbf{J}_s = -\frac{\partial\rho_s}{\partial t}, \quad (3.24)$$

sau sub formă compactă:

$$div_s\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho_s}{\partial t}, \quad (3.25)$$

în care s-a folosit notaţia $div_s\mathbf{G} = \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}) + div_2\mathbf{G}$. În cazul mediilor imobile, utilizând în locul densităţii de curent $\mathbf{J}$ curentul total $\mathbf{J} + \rho\mathbf{v}$, iar în locul densităţii superficiale de curent $\mathbf{J}_s$ suma $\mathbf{J}_s + \rho_s\mathbf{v}$, în care $\mathbf{v}$ este viteza domeniului 'hincărcat cu ρ_s, aplicând forma integrală dezvoltată a teoremei conservării sarcinii, rezultă:

$$\mathbf{n}_{12} \cdot [(\mathbf{J}_2 + \rho_2\mathbf{v_2}) - (\mathbf{J_1} + \rho_\mathbf{1}\mathbf{v_1})] + \mathbf{div_2}(\mathbf{J_s} + \rho_\mathbf{s}\mathbf{v}) = -\frac{\partial\rho_\mathbf{s}}{\partial\mathbf{t}}, \quad (3.26)$$

sau în formă compactă:

$$div_s(\mathbf{J} + \rho\mathbf{v}) = -\frac{\partial\rho_\mathbf{s}}{\partial\mathbf{t}}. \quad (3.27)$$

În **cazul regimului staţionar**, teorema conservării sarcinii devine:

- în forma globală

$$i_\Sigma = 0, \quad (3.28)$$

- în forma integrală

$$\int_\Sigma \mathbf{J}d\mathbf{A} = 0, \quad (3.29)$$

- în forma locală

$$div\mathbf{J} = 0, \quad (3.30)$$

- în forma pe suprafeţe de discontinuitate

$$div_s\mathbf{J} = 0. \tag{3.31}$$

În acest regim, *curentul electric ce străbate orice suprafaţa închisă este nul*, afirmaţie cunoscută sub numele de **teorema conservării curentului**. La trecerea prin suprafeţele de discontinuitate, componenta normală a densităţii de curent se conservă, dacă aceasta nu este parcursă de curent distribuit superficial şi respectiv are un salt egal cu divergenţa bidimensională a densităţii superficiale a curentului în caz contrar:

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -div_2\mathbf{J}_s \tag{3.32}$$

Aceste relaţii evidenţiază faptul că în regim staţionar liniile de curent nu pot fi curbe deshise, neexistând surse de pe care aceştea să pornească sau pe care să se oprescă. În particular, în cazul unui tub de curent, intensitatea curentului are aceeaşi valoare indiferent de secţiunea considerată (figura 3.3). Suprafaţa de separaţie dintre un domeniu conductor şi un mediu izolat este suprafaţa de câmp pentru liniile curentului electric, deoarece în mediul izolant $J = 0$, iar conform conservării componentei normale a densităţii de curent $J_n = 0$ şi în conductor, la suprafaţa sa. În consecinţă orice corp conductor cufundat într-un izolant reprezintă un tub de curent.

O altă consecinţă, care justifică numele teoremei se obţine în cazul în care domeniul D_Σ este **izolat electric** (este inconjurat de un perete izolant în care $i_\Sigma = 0$), ceea ce implică invarianţa în timp a sarcinii din acest domeniu

$$\rho_{D_\Sigma} = ct. \tag{3.33}$$

Dacă întreg mediul este izolant, forma locală a acestei relaţii este:

$$div(\rho\mathbf{v}) = -\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{t}}, \tag{3.34}$$

cu următoarea formă integrală dezvoltată:

$$\int_\Sigma \rho\mathbf{v}\mathbf{dA} = -\int \frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{t}}\mathbf{dv}, \tag{3.35}$$

relaţii similare celor care evidenţiază conservarea masei din mecanica fluidelor.

Semnificaţia fizică a teoremei conservării sarcinii.

Se consideră un corp conductor $\mathcal{D}_\pm$ înconjurat de un mediu izolat, exceptând un fir conductor (figura 3.4). Aplicând teorema conservării sarcinii pe suprafaţa Σ a conductorului se obţine:

$$i = -\frac{dq}{dt},$$

în care i este intensitatea curentului ce străbate firul iar q este sarcina corpului. În consecinţă, atunci când sarcina q a corpului scade în timp $i > 0$, iar curentul electric părăseşte corpul. Dacă în schimb sarcina conductorului creşte în timp $i < 0$, iar curentul electric este injectat în corp. Teorema pune în evidenţă drept cauză a electrizării corpurilor curentul electric (de conducţie sau convecţie), curent care "transportă" sarcini pe corp. Legătura strânsă între curent şi sarcina electrică este în acord cu interpretarea microscopică a fenomenului de conducţie, ca fiind datorat deplasării ordonate a purtătorilor microscopici de sarcină din interiorul corpurilor.

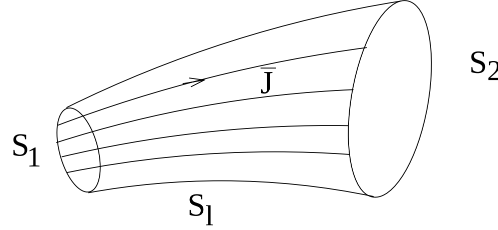


Figura 3.3: Tubul de curent

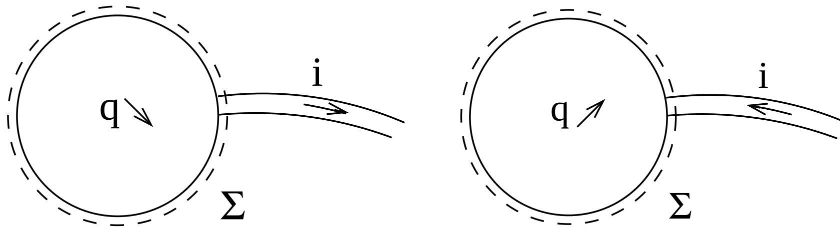


Figura 3.4: Conservarea sarcinii eletrice

3.2 Teorema energiei electromagnetice.

Enunţul teoremei energiei electromagnetice

Puterea transferată de câmpul electromagnetic unui domeniu imobil prin frontiera acestuia D_Σ *este egală cu puterea transferată corpurilor din domeniul* P_{D_Σ} *plus viteza de creştere a energiei câmpului electromagnetic* W_{em} *din domeniu*:

$$P_\Sigma = P_{D_\Sigma} + \frac{\partial W_{em}}{\partial t}. \tag{3.36}$$

Demonstraţia teoremei energiei electromagnetice

Pentru demonstrarea acestei afirmaţii se consideră un domeniu D_Σ, mărginit de suprafaţa închisă Σ, în care se află un sistem de corpuri imobile şi liniare din punct de vedere dielectric ($\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$) şi magnetic ($\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$). Formele locale ale legilor inducţiei electromagnetice şi circuitului magnetic:

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

permit stabilirea consecinţei:

$$\mathbf{E}rot\mathbf{H} - \mathbf{H}rot\mathbf{E} = \mathbf{J}E + \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Deoarece

$$div\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right) = \nabla\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right) = \nabla\left(\overset{\downarrow}{\mathbf{E}}\times\mathbf{H}\right) + \nabla\left(\mathbf{E}\times\overset{\downarrow}{\mathbf{H}}\right) = \mathbf{H}\left(\nabla\times\mathbf{E}\right) -$$

$$-\mathbf{E}\left(\nabla\times\mathbf{H}\right) = \mathbf{H}rot\mathbf{E} - \mathbf{E}rot\mathbf{H}$$

şi

$$\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E}\varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial \mathbf{E}^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{DE}}{2}\right),$$

$$\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{BH}}{2}\right),$$

rezultă că:

$$-div\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right) = \mathbf{JE} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{DE}}{2} + \frac{\mathbf{BH}}{2}\right), \tag{3.37}$$

în care: $p = \mathbf{EJ}$ reprezintă conform legii transformării energiei în conductoare densitatea de volum a puterii transferată de câmp corpurilor, iar

$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$ reprezintă vectorul Paynting, măsurat în W/m^2;

$w_e = \mathbf{DE}/2$ reprezintă densitatea de volum a energiei electrice, măsurată în J/m^3;

$w_m = \mathbf{BH}/2$ reprezintă densitatea de volum a energiei magnetice, măsurată în J/m^3.

Notând cu $w_{em} = w_e + w_m$ densitatea de volum a energiei câmpului electromganetic, rezultă că:

$$-div\mathbf{S} = p + \frac{\partial w_{em}}{\partial t}, \tag{3.38}$$

relaţie cunoscută sub numele de forma localaă a teoremei energiei electromagnetice.

Prin integrarea acestei relaţii diferenţiale locale pe domeniul D_Σ se obţine:

$$-\int_{D_\Sigma} div\mathbf{S}dv = -\int_\Sigma \mathbf{S}d\mathbf{A} = \int_{D_\Sigma} pdv + \frac{\partial}{\partial t}\int_{D_\Sigma} w_{em}dv$$

Notând cu $P_\Sigma = -\int_\Sigma \mathbf{S}d\mathbf{A} = \int_\Sigma \mathbf{S}d\mathbf{A}_{int}$, puterea transferată prin suprafaţa Σ de la exterior spre interior;

$P_{D_\Sigma} = \int_{D_\Sigma} pdv$, puterea transferată corpurilor din domeniul D_Σ şi
$W_{em} = W_e + W_m$, energia electromagnetică din domeniul D_Σ cu componentele:
$W_e = \int_{D_\Sigma} w_e dv$, energia câmpului electric şi
$W_m = \int_{D_\Sigma} w_m dv$, energia câmpului magnetic,
rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

3.3 Teorema condensatorului liniar.

Un dispozitiv folosit frecvent în aplicaţiile electromagnetismului îl reprezintă condensatorul electric. Acesta este alcătuit din două armături conductoare separate de un izolant, numit şi dielectric. Acest dispozitiv capabil să producă în dielectric un câmp electric, atunci când armăturile sunt încărcate cu sarcină, poate fi utilizat ca acumulator de sarcină electrică şi implicit de energie. Se spune că un condensator este încărcat, atunci când o armătură are sarcina Q iar cealaltă are sarcina $-Q$. Pentru caracterizarea stării electrice a unui condensator, în afara sarcinii Q se utilizează şi tensiunea între armături:

$$U = \int_{C_{12}} \mathbf{E}d\mathbf{r},$$

în care C_{12} este o curbă ce uneşte două puncte plasate pe cele două armături. În regim staţionar şi absenţa stării electrocinetice fiecare din cele două armături este echipotenţială, deci tensiunea U nu depinde de poziţia celor două puncte pe armături. Presupunând prima armătură încărcată cu sarcina $Q_1 = Q$, rezultă conform legii fluxului electric că $\Psi_{\Sigma_1} = Q_1$, în care

$$\Psi_{\Sigma_1} = \int_{\Sigma_1} \mathbf{D}d\mathbf{A}$$

este fluxul electric de pe suprafaţa Σ_1 ce înconjoară strâns prima armătură.

Teorema condensatorului liniar afirmă că *un condensator realizat cu un dielectric liniar ($\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$) are sarcina proporţională cu tensiunea*:

$$Q = CU. \qquad (3.39)$$

Această afirmaţie rezultă din teorema tubului de flux electric. Parametrul C, numit capacitatea condensatorului caracterizează sistemul de armături fiind independent de starea sa electrică.

Capacitatea unui condensator se defineşte prin:

$$C = \frac{Q_1}{U_{12}}, \tag{3.40}$$

definiţie care poate fi aplicată şi condensatoarelor cu dielectric neliniar, dar în acest caz capacitatea depinde de tensiunea la bornele condensatorului. Respectând orientarea curbei C_{12} conform definiţiei, capacitatea condensatorului rezultă ca o mărime pozitivă.

Ca aplicaţie a teoremei se va considera cazul condensatorului plan, la care armăturile au suprafeţele plane şi paralele. Considerând domensiunile armăturilor mult mai mari decât distanţa dintre ele se poate presupune că intensitatea câmpului electric este constantă în dielectric, neglijând în acest fel efectele de margine. Dielectricul reprezintă un tub de flux electric, cu câmp uniform. Dacă se notează cu A aria armăturilor, cu d distanţa dintre ele (lungimea dielectricului) şi cu ε permitivitatea dielectricului presupus omogen se obţine:

$$Q_1 = \Psi_{\Sigma_1} = \int_{\Sigma_1} \mathbf{D} d\mathbf{A} = DA,$$

$$U_{12} = \int_{C_{12}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int_{C_{12}} E dr = \int_{C_{12}} \frac{D}{\varepsilon} dr = \frac{Dd}{\varepsilon}.$$

Aplicând definiţia capacităţii se obţine:

$$C = \frac{\varepsilon A}{d}, \tag{3.41}$$

care este relaţia de calcul a capacităţii condensatorului plan.

Funcţionarea unui condensator în regim dinamic, cu tensiunea la borne $u = u(t)$ şi sarcină $q = q(t)$ variabile presupune prezenţa unor conductoare, care alimentează cu curent armăturile. Conform legii conservării sarcinii electrice, intensitatea curentului prin aceste conductoare de aducţie este:

$$i = -i_\Sigma = \frac{dq_{D_\Sigma}}{dt} = \frac{dq}{dt}. \tag{3.42}$$

Presupunând satisfăcută relaţia $q = CU$ (ceea ce presupune că efectele inducţiei electromganetice sunt neglijate), rezultă că:

$$i = C\frac{du}{dt}, \tag{3.43}$$

relaţie care evidenţiază legătura dintre tensiune şi curent impusă de un condensator liniar în regim variabil. În cazul condensatoarelor cu dielectric neliniar ecuaţia de funcţionare a acestuia în regim variabil are forma:

$$i = \frac{dq(u)}{dt} \tag{3.44}$$

în care funcţia $q = q(u)$ este specifică fiecărui condensator. În stabilirea acestei relaţii s-a presupus că dielectricul este izolant perfect, ceea ce nu este întotdeauna real. Dacă se ia în considerare şi curentul de pierderi prin dielectric, a cărui conductanţa va fi notată cu G, rezultă:

$$i = Gu + C\frac{du}{dt}, \tag{3.45}$$

ecuaţie specifică unui condensator liniar cu izolant imperfect.

3.4 Teorema rezistorului liniar

3.5 Teorema bobinei liniare.

Dispozitivul tipic pentru producerea câmpului magnetic în electrotehnică este bobina. Aceasta este alcătuită dintr-un conductor filiform înfăşurat în jurul unui miez magnetic sau în aer. Pentru caracterizarea stării unei bobine în regim staţionar în afară intensităţii curentului I ce străbate bobina se mai foloseşte şi fluxul magnetic total al acesteia:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{A}, \tag{3.46}$$

suprafaţa S sprijinindu-se pe curba mediană Γ a firului. În regim staţionar, conform teoremei lui Ampere, tensiunea magnetică pe o curbă Γ', care înconjoară strâns cele n spire ale bobinei are valoarea:

$$u_{m_{\Gamma'}} = \int_{\Gamma'} \mathbf{H} d\mathbf{r} = nI. \tag{3.47}$$

Teorema bobinei liniare afirmă că *o bobină cu miez magnetic liniar ($\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$) are fluxul total proporţional cu intensitatea curentului ce o străbate*:

$$\Phi = LI, \tag{3.48}$$

Această relaţie se demonstrează folosind liniaritatea relaţiilor $\Phi - \mathbf{B}$, $I - \mathbf{H}$ şi $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ sau implicit pe baza teoremei tubului de flux liniar. Parametrul L poartă numele de inductivitatea bobinei iar în cazul bobinei liniare acest parametru nu depinde de starea magnetică a bobinei ci doar de datele geometrice şi de material. Definiţia inductivităţii:

$$L = \frac{\Phi}{I} \tag{3.49}$$

poate fi aplicată şi în cazul bobinelor neliniare, cu observaţia că atunci L depinde de intensitatea curentului ce străbate bobina. Dacă se respectă regula burghiului drept pentru asocierea sensurilor de referinţă pentru Φ şi I, inductivitatea bobinelor este o mărime pozitivă.

Ca aplicaţie a acestei teoreme se va considera cazul *solenoidului*, care este o bobină la care diametrul este mult mai mare decât lungimea sa. Această ipoteză definitorie permite să se considere câmpul magnetic din miez ca fiind uniform, cu liniile de câmp drepte şi paralele. Dacă se notează cu A aria secţiunii transversale a miezului bobinei, cu l lungimea lui şi cu μ permeabilitatea miezului, presupus omogen, atunci fluxul total al bobinei este:

$$\Phi = n\Phi_f = n\int_{S_1} \mathbf{B}d\mathbf{A} = nBA = n\mu HA, \tag{3.50}$$

în care s-a notat cu Φ_f fluxul de pe o spiră arbitrară S_1 a bobinei, numit flux fascicular.

Tensiunea magnetică pe un dreptunghi ce înconjoară toate spirele bobinei este:

$$U_{m_{\Gamma'}} = \int_{\Gamma'} \mathbf{H}d\mathbf{r} = Hl = nI, \tag{3.51}$$

presupunând că în afara bobinei câmpul este nul. În consecinţă:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu n^2 A}{l} \tag{3.52}$$

Aceasta este relaţia de calcul a inductivităţii unui solenoid.

În condiţiile în care se consideră două bobine învecinate, fluxul magnetic dintr-o bobină nu depinde numai de propriul curent ci şi de cel din bobina vecină. Dacă mediul este liniar din punct de vedere magnetic, liniaritatea dependinţei dintre flux şi curenţi este menţinută:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= L_{11}I_1 + L_{12}I_2; \\ \Phi_2 &= L_{21}I_1 + L_{22}I_2. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Sistemul de două bobine este caracterizat de patru parametri:

L_{11}, L_{22} - inductivităţile proprii ale celor două bobine,

L_{12}, L_{21} - inductivităţile mutuale ale bobinelor.

Valorile acestor parametrii nu depind de valorile curenţilor, dar semnul lor depinde de sensul de referinţă ales pentru curenţi. Dacă se respectă regula burghiului drept, L_{11} şi L_{22} sunt pozitive. În schimb $L_{12} = L_{21}$ poate avea o valoare pozitivă sau negativă. Pentru a evita ambiguitatea asupra semnului inductivităţile mutuale se marchează câte o bornă a fiecărei bobine (borna marcată se numeşte bornă polarizată). Relaţia între fluxuri şi curenţi este valabilă sub forma prezentată, dacă se presupune că ambii curenţi I_1 şi I_2 au sensurile de referinţă astfel încât să intre în bobine prin bornele polarizate. La modificarea unei borne

polarizate se schimbă semnul inductivităţii mutuale. Relaţiile stabilite pentru două bobine pot fi generalizate la cazul unui sistem de n bobine:

$$\begin{cases} \Phi_1 &= L_{11}I_1 + L_{12}I_2 + \ldots + L_{1n}I_n \\ \Phi_2 &= L_{21}I_1 + L_{22}I_2 + \ldots + L_{2n}I_n \\ \ldots \\ \Phi_n &= L_{n1}I_1 + L_{n2}I_2 + \ldots + L_{nn}I_n \end{cases} \tag{3.54}$$

Aceste relaţii numite ecuaţiile lui Maxwell pentru inductivităţi pot fi scrise sub formă compactă

$$\Phi = LI, \tag{3.55}$$

folosind notaţia matriceală:

- $\Phi = [\Phi_1; \Phi_2; \ldots; \Phi_n]^T$ - vectorul fluxurilor;
- $I = [I_1; I_2; \ldots; I_n]^T$ - vectorul curenţilor;
- matricea inductivităţilor (proprii şi mutuale)

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \ldots & L_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \ldots & L_{nn} \end{bmatrix}$$

Aceasta este o matrice simetrică ($L_{ij} = L_{ji}$). Inductivităţile proprii se definesc prin:

$$L_{ii} = \left.\frac{\Phi_i}{I_i}\right|_{I_j=0, j\neq i} \geq 0,$$

iar cele mutuale prin:

$$L_{ij} = \left.\frac{\Phi_i}{I_j}\right|_{I_k=0, k\neq j} \gtrless 0.$$

Funcţionarea unei bobine în regim dinamic presupune apariţia fenomenului de inducţie electromagnetică. Dacă se neglijează curentul de deplasare în comparaţie cu cel de conducţie, relaţiile de proporţionalitate între flux şi curent $\varphi = Li$ îşi menţin valabilitatea pentru mediile liniare şi în regim dinamic. Presupunând înfăşurarea bobinei ca fiind supraconductoare, tensiunea la bornele bobinei u este egală cu tensiunea indusă, dată de legea inducţiei electromagnetice, luată cu sens schimbat:

$$u_\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\frac{d\varphi_{S_\Gamma}}{dt} = -u = -\int_{C_{ext}} \mathbf{E} d\mathbf{r}.$$

Deoarece $\varphi_{S_\Gamma} = \varphi = Li$, rezultă relaţia dintre tensiune şi curent impusă de o bobină ideală:

$$u = L\frac{di}{dt}. \tag{3.56}$$

Dacă bobina are miezul neliniar, atunci:

$$u = \frac{d\varphi(i)}{dt} \tag{3.57}$$

în care $\varphi = \varphi(i)$ este o funcţie caracteristică bobinei.

În realitate, înfăşurarile bobinelor nu sunt supraconductoare şi prezintă o rezistenţă nenulă:

$$u_\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{E} d\mathbf{r} = Ri - u = -\frac{d\varphi}{dt}.$$

Ecuaţia de funcţionare a bobinei reale fiind:

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} \tag{3.58}$$

în cazul bobinei liniare şi

$$u = Ri + \frac{d\varphi(i)}{dt} \tag{3.59}$$

în cazul bobinei neliniare.

În cazul unei perechi de bobine, prin aplicarea legii inducţiei electromagnetice, se obţine sistemul de ecuaţii:

$$\begin{aligned} u_1 &= L_{11}\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt} + R_1 i_1; \\ u_2 &= L_{21}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2, \end{aligned} \tag{3.60}$$

care dau expresiile tensiunilor de la bornele bobinelor în funcţie de curenţii ce le străbat. Aceste relaţii se generalizează uşor pentru cazul a n bobine.

Relaţiile obţinute presupun neglijarea curenţilor de deplasare în interiorul bobinelor. În realitate, o bobină la frecvenţe foarte înalte poate prezenta efecte capacitive între spirele ei, ceea ce conduce la fenomene de propagare de-a lungul conductorului, relaţiile 3.58 - 3.60 nefiind riguros valabile. În teoria circuitelor electrice fenomenele de propagare nu sunt luate în consideraţie, ceea ce presupune că vitezele de variaţie a mărimilor sunt suficient de mici, pentru ca acestea să fie neglijabile sau echivalent că lungimile circuitelor sunt mult mai mici decât lungimile undelor electromagnetice ce pot apare. Din acest motiv se spune că elementele de circuit au parametrii concentraţi.

Aprecierea dimensiunilor unui circuit are un caracter relativ. De exemplu, în cazul frecvenţei industriale $f = 50Hz$, lungimea de undă este $\lambda = c/f = (3 \cdot 10^8 m/s) / (50Hz) = 6 \cdot 10^6 m$ urmând ca circuitele cu lungimea mai mică de 60 km să fie considerate cu parametrii concentraţi. Cu toate că acestă dimensiune pare foarte mare trebuie menţionat că există multe linii de înaltă tensiune care depăşesc acestă lungime, ceea ce face ca acestea să nu poată fi considerate ca circuite electrice. Dacă frecvenţa are în schimb valoarea 1 GHz lungimea de undă devine mult mai mică $\lambda = c/f = 300mm$. Chiar şi în acest caz circuitele integrate cu dimensiuni de ordinul milimetrilor pot fi considerate circuite cu parametrii concentraţi.

3.6 Teoremele forţelor generalizate

Teorema forţei generalizate în câmp electric

Enunţul teoremei forţei generalizate în câmp electric

Forţa feneralizată X_k cu care câmpulelectric acţionează asupra sistemelor de corpuri, este:

$$X_k = - \left. \frac{\partial W_e}{\partial x_k} \right|_{\psi = ct}, \tag{3.61}$$

în care

$$W_e = \int_D w_e dv \tag{3.62}$$

cu

$$w_e = \int_0^D \mathbf{E} d\mathbf{D} \tag{3.63}$$

este energia câmpului electric din sistem iar x_k este coordonata generalizată asociată forţei X_k.

Se constată că la flux (sarcină) constant(ă) sistemul evoluează în sensul minimizării energiei sale (figura 3.5).

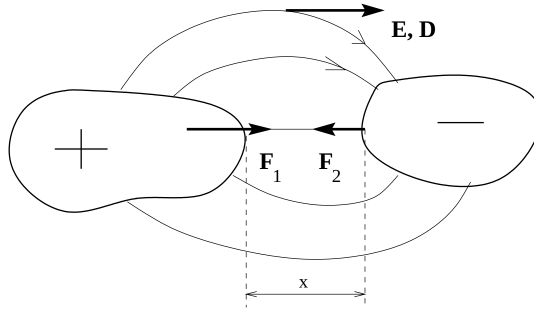


Figura 3.5: Efectul mecanic al câmpului electric

Tabelul 3.1 prezintă câteva exemple de perechi de forţe şi coordonate generalizate.

Tabela 3.1: Exemple de perechi de forţe şi coordonate generalizate

X_k	x_k
Forţa $[N]$	deplasarea $[m]$
Cuplu $[N/m]$	unghi $[rad]$
Presiunea $[N/m^2]$	volumul $[m^3]$

În cazul mediilor liniare la care $\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\mathbf{E}$ şi $\mathbf{P}_p = 0$, energia electrică are expresia:

$$W_e = \int_D \frac{\mathbf{DE}}{2} dv. \tag{3.64}$$

Teorema forţei generalizate în câmp magnetic

Enunţul teoremei forţei generalizate în câmp magnetic

Forţa generalizată X_k cu care câmpul magnetic acţionează asupra unui sistem de corpuri este:

$$X_k = - \left. \frac{\partial W_m}{\partial x_k} \right|_{\phi = ct} \tag{3.65}$$

în care

$$W_m = \int_D w_m dv \ \text{ cu } \ w_m = \int_0^B \mathbf{H} d\mathbf{B} \tag{3.66}$$

este energia câmpului magnetic din sistem iar x_k este coordonata generalizată asociată forţei X_k.

În cazul mediilor la care $\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}\mathbf{H}$ şi $\mathbf{M}_p = 0$, energia magnetică are expresia.

$$W_m = \int_D \frac{\mathbf{BH}}{2} dv \tag{3.67}$$

Se constată că şi în acest caz sistemul de corpuri tinde să evolueze astfel încât să se minimizeze energia câmpului magnetic (figura 3.6).

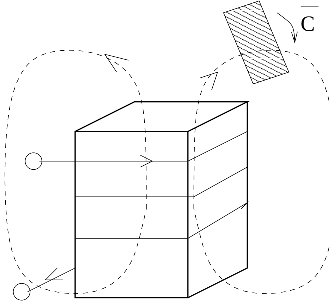


Figura 3.6: Efectul mecanic al câmpului magnetic

În multe dispozitive electromagnetice fenomenele mecanice joacă un rol important, mai ales atunci când acestea au piese în mişcare. Chiar şi în cazul dispozitivelor statice (cu parţi imobile) *solicitările mecanice* pot determina limitele regimurilor normale de funcţionare. De obicei analiza efectelor mecanice se face ulterior rezolvării problemei de câmp electromagnetic. Există totuşi situaţii în care cele două probleme nu pot fi separate ci trebuie tezolvate simultan, ca o problemă cuplată electromagnetică – mecanică. Acesta este mai ales cazul

dispozitivelor cu părţi mobile (maşini electrice, dispozitive de acţionare, pompe magneto – hidrodonamice etc.) indiferent că acestea sunt rigide, deformabile, plastice, sau fluide.

3.7 Circuite electrice cu elemente filiforme în regim staţionar. Teoremele lui Kirchhoff.

Teorema lui Joubert

Cele mai simple circuite electrice sunt cele realizate cu conductoare filiforme, care sunt conectate pe la borne (au bornele puse în contact) şi care funcţionează în regim staţionar. Pentru a caracteriza starea unui astfel de element de circuit se utilizează două mărimi fizice scalare asociate unor sensuri de referinţă:

I - intensitatea curentului electric, şi

U - tensiunea electrică.

s-a demonstrat că relaţia impusă de un astfel de element de circuit între mărimile caracteristice este:

$$U = RI - E, \tag{3.68}$$

în care R este rezistenţa firului iar E este tensiunea sa electromotoare. Dacă sensul de referinţă al tensiunii electrice sau al curentului electric se modifică, atunci se schimbă şi semnul mărimii respective, deci în general:

$$U = \pm RI \pm E, \tag{3.69}$$

în care semnele se aleg în funcţie de sensurile de referinţă. Această relaţie este cunoscută sub numele de relaţia lui Joubert. În particular, atunci când $E = 0$, rezultă pentru cazul rezistorului filiform liniar $U = \pm RI$, cunoscută sub numele de relaţia lui relaţia lui Ohm.

Topologia circuitelor

Se constată că ecuaţia caracteristică a fiecărui element şi implicit starea întregului circuit nu depind de forma conductorului filiform ci doar de lungimea sa şi de modul în care elementul este conectat. Prin modificarea traseului conductorului, fără a schimba conexiunea bornelor acestuia starea circuitului nu se modifică. Din acest motiv se spune că circuitul are o structură topologică şi nu una metrică (nu au importanţă distanţele între borne sau unghiurile între elemente). În consecinţă în ecuaţiile teoriei circuitelor electrice nu intervin variabilele spaţiale x, y, z, coordonate ale punctelor. Structura unui circuit este descrisă de schema sa electrică sau din punct de vedere matematic de graful circuitului.

Prin graful unui circuit se înţelege o mulţime de puncte, numite noduri şi care reprezintă bornele elementelor de circuit unite printr-o mulţime de arce de curbă, numite laturi, care reprezintă elementele circuitului.

Deoarece graful unui circuit descrie topologia circuitului şi nu geometria acestuia, forma laturilor nu corespunde în mod necesar formei conductoarelor filiforme corespunzătoare. Pentru a permite identificarea sensului în care sunt conectate elementele de circuit, laturile se consideră curbe orientate. În consecinţă, structura topologică a unui circuit este descrisă de un graf orientat.

În continuare se va nota cu: N - numărul total de noduri din graf (circuit); L - numărul total de laturi din graf (circuit). Pentru a permite identificarea lor laturile şi nodurile vor fi numerotate, folosind indicele $l = 1, 2, ..., L$ şi respectiv $n = 1, 2, ..., N$. Pentru a evita confuziile indicii nodurilor se închid în paranteze rotunde (n).

Un concept topologic important în teoria circuitelor este cel de *cale*. Aceasta reprezintă o mulţime de laturi ce alcătuiesc o curbăconexă, simplă (fără ramificaţii). O cale este o curbă ce uneşte două noduri, unul iniţial cu altul final. Dacă cele două noduri extreme sunt confundate (curba este închisă), calea se numeşte *buclă*. Dacă buclele unui circuit sunt numerotate $b = 1, 2, ...$, atunci pentru a evita confuziile simbolul buclei se închide între paranteze pătrate $[b]$.

Fiecare latură are două noduri la care aceasta concură. Această relaţie între o latură l şi un nod n se notează $l \in (n)$ şi se citeşte 'latura l concură la nodul n". Relaţia de incidenţă a laturilor la noduri definesc complet structura topologică a unui circuit. Faptul că o anumită latură l aparţine unei bucle $[b]$ se scrie sub forma $l \in [b]$.

Topologia unui circuit impune anumite relaţii între curenţi şi respectiv între tensiuni, relaţii independente de caracteristicile fiecărei laturi. Aceste relaţii sunt cunoscute sub numele de teoremele lui Kirchhoff

Prima teoremă a lui Kirchhoff

Afirmă că suma algebrică a intensităţilor curenţilor din laturile care concură la orice nod al unui circuit este nulă:

$$\sum_{k\in(n)}{}^{A} I_k = 0, \qquad n = 1, 2, \dots, N. \tag{3.70}$$

Prin suma algebrică:

$$\sum_{i=1,m}{}^{A} x_i = \sum_{i=1,n} \varepsilon_i x_i \tag{3.71}$$

se înţelege o sumă în care fiecare termen este ponderat cu un factor de semn ε_i, factor care poate avea fie valoarea +1 fie valoarea -1 conform unei reguli de semn.

În prima teoremă a lui Kirchhoff se adoptă următoarea *regulă de semn*: curentul I_k se trece cu plus dacă sensul lui de referinţă părăseşte nodul curent (n) şi cu

minus în caz contrar. Este evident că această regulă are un caracter convenţional, relaţia 3.70 fiind valabilă şi în cazul adoptării convenţiei inverse.

Demonstraţia primei teoreme a lui Kirchhoff în acest caz al regimului staţionar se bazează pe teorema conservării curentului (formă particulară a legii conservării sarcinii în regim staţionar) aplicată pe o suprafaţă închisă Σ ce înconjoară nodul (n), conform căreia:

$$i_\Sigma = \int_\Sigma \mathbf{J} d\mathbf{A} = \sum_{k\in(n)} \int_{S_k} \mathbf{J} d\mathbf{A} = \sum_{k\in(n)} I_k = 0.$$

În această relaţie s-a presupus că toţi curenţii I_k părăsesc nodul (n). Dacă un curent are sensul de referinţă orientat spre nodul (n), pentru ca relaţia să fie corectă, intensitatea va trebui considerată cu semn schimbat, ceea ce explică necesitatea introducerii regulii de semn.

A doua teoremă a lui Kirchhoff

Afirmă că suma algebrică a tensiunilor din laturile oricărei bucle din circuit este nulă:

$$\sum_{k\in[b]}{}^{A} U_k = 0. \tag{3.72}$$

Regula de semn care defineşte suma algebrică în acest caz este dată de comparaţia între semnul de referinţă al tensiunii şi semnul de parcurs al buclei considerată orientată. Tensiunea U_k se consideră cu semnul plus, atunci când sensul ei de referinţă este orientat în sensul buclei $[b]$ şi cu minus în sens contrar.

Demonstraţia acestei teoreme se bazează pe teorema potenţialului electric staţionar (formă particulară a legii inducţiei în regim staţionar), aplicată pe curba Γ alcătuită din laturile buclei $[b]$:

$$u_\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{E} d\mathbf{r} = \sum_{k\in[b]} \int_{C_k} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \sum_{k\in[b]} U_k = 0.$$

În această relaţie s-a presupus că toate tensiunile U_k au sensurile de referinţă orientate în sensul de parcurs al buclei. Dacă o tensiune are sensul de referinţă orientat invers, atunci va trebui considerată cu semn schimbat de unde rezultă caracterul algebric al sumei .

O consecinţă imediată a celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff este afirmaţia că tensiunea electrică între două noduri nu depinde de calea ce uneşte nodurile A şi B. Tensiunea electrică pe bucla $b = C_1 \bigcup C_2$, în care C_1 şi C_2 sunt două căi ce unesc nodurile A şi B este nulă

$$u_b = \sum_{k\in[b]}{}^{A} U_k = U_1 - U_2 = 0, \tag{3.73}$$

în consecinţă $U_1 = U_2 = U_{AB}$.

Starea unui circuit electric poate fi caracterizată folosind potenţialele nodurilor. În acest scop se alege un nod de referinţă (0), pentru care potenţialul se consideră în mod convenţional nul, iar potenţialul unui nod oarecare (k) se defineşte ca tensiunea de la nodul (k) la nodul de referinţă (0), care conform afirmaţiei anterioare este invariantă la calea adoptată:

$$V_k = U_{k0} = \int_{C_{k0}} \mathbf{E} d\mathbf{r}. \tag{3.74}$$

Utilizarea potenţialului facilitează calculul tensiunii:

$$U_{AB} = U_{A0} + U_{0B} = U_{A0} - U_{B0} = V_A - V_B, \tag{3.75}$$

care se exprimă ca o diferenţa de potenţiale, mai exact potenţialul iniţial minus cel final:

$$U_{AB} = V_A - V_B \tag{3.76}$$

Se constată că schimbarea sensului de referinţă al tensiunii determină modificarea semnului acesteia $U_{AB} = -U_{BA}$.

Caracterizarea energetică

O altă relaţie importantă în teoria circuitelor electrice se referă la **puterea transferată** pe la bornele unui element de circuit:

$$P = UI. \tag{3.77}$$

Pentru a determina sensul puterii transferate se interpretează semnul acestei mărimi. Deoarece semnul lui P depinde de modul în care sunt alese sensurile de referinţă ale tensiunii U şi curentului I, este necesară introducerea unor reguli de interpretare.

Regula de asociere a sensurilor de la receptoare se aplică atunci când tensiunea U şi intensitatea I au sensuri de referinţă orientate similar faţă de bornele elementului (ambele de la A spre B sau invers, ambele de la B spre A), conform regulii de la receptoare, puterea $P = UI$ este transferată de la circuit spre element, când $P > 0$ şi transferată de la element spre circuit, când $P < 0$. Se constată că în acest caz, sensul convenţional al puterii $P = UI$ este de la circuit spre element.

Regula de asociere a sensurilor de la generatoare se aplică atunci când tensiunea U şi intensitatea I au sensurile de referinţă orientate opus (una de la A spre B şi cealaltă de la B spre A). În regula de la generatoare sensul convenţional al puterii $P = UI$ este de la element spre circuit. Sensul real al puterii coincide cu cel convenţional, atunci când $P = UI > 0$ şi este invers acestuia atunci când $P = UI < 0$.

Teoria circuitelor electrice în regim staţionar se bazează pe cele două teoreme ale lui Kirchhoff în formă topologică 3.70 şi 3.72, ecuaţiile constitutive caracteristice elementelor de circuit şi date de relaţia Joubert 3.69 şi pe expresia puterii transferate de la bornele elementului de circuit 3.77. În toate aceste relaţii sensurile de referinţă au un rol foarte important.

În concluzie, se poate afirma că relaţiile fundamentale ale teoriei circuitelor electrice în regim staţionar au un caracter algebric finit, starea electrică a circuitului fiind caracterizată de $2L$ mărimi scalare, câte o tensiune şi câte un curent pentru fiecare latură.

3.8 Circuite electrice cu parametri concentraţi.

Încercarea de a stabili ecuaţiile fundamentale ale circuitelor electrice în regim variabil se izbeşte de mai multe dificultăţi. În primul rând, tensiunea electrică în regim variabil depinde nu numai de punctele extreme ci şi de forma curbei, ceea ce nu permite exprimarea tensiuni ca o diferenţă de potenţial. O altă dificultate constă în apariţia fenomenului de propagare datorită căruia este posibil ca un element de circuit să aibă valori diferite ale intensităţii curentului la cele două borne ale sale.

Aceste dificultăţi pot fi evitate prin adoptarea unor ipoteze simplificatoare, care evidenţiază aproximaţiile teoriei circuitelor electrice cu parametrii concentraţi:

- Energia câmpului magnetic se consideră localizată exclusiv în miezul bobinelor, în care se neglijează în schimb curentul de deplasare (densitatea de energie electrică este neglijabilă faţă de densitatea energiei magnetice);

- Energia câmpului electric se consideră localizată exclusiv în dielectricul condensatoarelor, în care se neglijează în schimb fenomenul de inducţie electromagnetică (densitatea energiei magnetice este neglijabilă faţă de densitatea energiei electrice);

- În interiorul conductoarelor, presupuse filiforme sau nu se neglijează atât curentul de deplasare cât şi fenomenul de inducţie electromagnetică;

- Spaţiul exterior elementelor de circuit se consideră izolant şi nu poate fi locul unor curenţi de deplasare (deci implicit al undelor electromagnetice), atât inducţia magnetică dar şi inducţia electrică presupunându-se nule în aceste zone.

În consecinţă, circuitele cu parametrii concentraţi pot avea trei tipuri de elemente: rezistiv, inductiv şi capacitiv. Fenomenul de inducţie magnetică este limitat la elementele inductive (bobine), curenţii de deplasare sunt localizaţi doar în elementele capacitive (condensatoare), urmând ca elementele rezistive (conductoarele filiforme) să fie sediul exclusiv al fenomenelor galvanice, de conducţie.

Această separare elimină posibilitatea apariţiei fenomenelor specifice câmpurilor variabile (propagări, efect pelicular, curenţi turbionari, etc.).

În ipotezele menţionate, fiecare element dipolar (cu două borne) de circuit poate fi caracterizat printr-o pereche de mărimi scalare:

i - intensitatea curentului ce străbate elementul;

u - tensiunea electrică la borne.

Mai mult, forma topologică a teoremelor lui Kirchhoff, stabilită în paragraful anterior, rămâne valabilă şi în acest caz.

Prima teoremă a lui Kirchhoff

Suma algebrică a curenţilor ce concură la un nod este nulă:

$$\sum_{k\in(n)}^{A} i_k = 0, \tag{3.78}$$

cu observaţia că în acest caz $i_k = i_k(t)$ poate fi variabil în timp.

Demonstraţia teoremei se bazează pe legea conservării sarcinii electrice, aplicate pe o suprafaţă închisă Σ ce înconjoară nodul (n):

$$i_\Sigma = \sum_{k\in(n)} i_k = \frac{dq_{D_\Sigma}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_\Sigma \mathbf{D}d\mathbf{A} = 0, \tag{3.79}$$

aceasta, deoarece suprafaţa Σ străbate doar conductoare de aducţie sau spaţiul exterior elementelor în care $D = 0$, deci sarcina care poate fi acumulată în oricare nod al circuitului este nulă.

Această teoremă garantează faptul că valorile intensităţilor curenţilor în cele două borne ale unui element dipolar de circuit electric cu parametrii concentraţi sunt egale.

A doua teoremă a lui Kirchhoff

Suma algebrică a tensiunilor de pe laturile unei bucle este nulă:

$$\sum_{k\in[b]}^{A} u_k = 0, \tag{3.80}$$

cu observaţia că tensiunile $u_k = u_k(t)$ pot fi variabile în timp.

Demonstraţia teoremei se bazează pe legea inducţiei electromagnetice aplicte pe o curbă Γ ce urmăreşte laturile buclei $[b]$, dar trecând de la o bornă la alta prin exteriorul elementelor de circuit:

$$u_\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{E}d\mathbf{r} = \sum_{k\in[b]}\int_{C_k}\mathbf{E}d\mathbf{r} = \sum_{k\in[b]} u_k = -\frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma}\mathbf{B}d\mathbf{A} = 0.$$

Deoarece în exteriorul elementelor inducţia magnetică **B** este nulă rezultă că fluxul magnetic $\varphi_{S_\Gamma} = 0$.

Utilizând pentru fiecare element, tensiunea la borne (determinată pe o curbă ce trece prin exteriorul elementului), rezultă că tensiunea între două noduri nu depinde de calea pe care aceasta este determinată şi în consecinţă tensiunea electrică se poate exprima ca diferenţă de potenţial:

$$u_{AB} = v_A - v_B. \tag{3.81}$$

Potenţialul unui nod (k) se defineşte şi de această dată ca tensiunea de la acel nod la nodul de referinţă (0):

$$v_k = u_{k0}. \tag{3.82}$$

După cum s-a arătat în capitolul anterior, ecuaţiile caracteristice elementelor cu parametrii concentraţi sunt:

- pentru rezistoare filiforme:

$$u = \pm Ri \pm e; \tag{3.83}$$

- pentru condensatoare cu dielectric imperfect:

$$i = \pm Gu \pm C\frac{du}{dt}; \tag{3.84}$$

- pentru bobine necuplate:

$$u = \pm Ri \pm L\frac{di}{dt}, \tag{3.85}$$

în care R este rezistenţa firului, e tensiunea electromotoare, G conductanţa de pierderi a dielectricului, C este capacitatea condensatorului şi L inductivitatea bobinei. Semnele $\pm$ se aleg funcţie de modul în care au fost alese sensurile de referinţă pentru u şi i. Se constată că spre deosebire de cazul circuitelor în regim staţionar unde ecuaţiile au caracter algebric, în regim variabil ecuaţiile circuitelor au caracter diferenţial.

Şi în cazul circuitelor electrice cu parametrii concentraţi puterea transferată pe la bornele unui element bipolar se calculează ca produsul dintre tensiune şi curent:

$$p = ui \tag{3.86}$$

interpretarea sensului făcându-se după regula de asociere adoptată (receptoare sau generatoare).

Teoria care are la bază aceste relaţii fundamentale poate fi generalizată, luând în considerare şi elemente multipolare de circuit cum sunt bobinele cuplate sau domeniile conductoare cu mai multe borne, numite rezistoare multipolare.

3.9 Circuite electrice formate din elemente cu parametrii distribuiţi

În general, circuitele electrice reprezintă sisteme electromagnetice, la care structura internă şi propietăţile de material fac posibilă separarea în subsisteme, numite elemente de circuit, şi care au proprietatea că interacţiunea dintre ele poate fi caracterizată printr-un număr finit de variabile scalare. În teoria circuitelor se renunţă la structura metrică a spaţiului fizic, păstrându-se doar structura topologică. Pentru a realiza această simplificare majoră, câmpul electromagnetic de pe suprafaţa de frontieră a oricărui element de circuit trebuie să satisfacă anumite condiţii, evidenţiate de următoarea definiţie.

Elementul multipolar de circuit electric.

Un domeniu spaţial D_Σ se numeşte element de circuit dacă pe frontiera sa Σ (numită şi suprafaţa tensiunilor la borne) se separă n suprafeţe disjuncte $S_1, S_2, \ldots, S_n$, numite borne (sau terminale), astfel încât:

$$\mathbf{n} \cdot rot\mathbf{E}(M,t) = 0, \qquad M \in \Sigma; \tag{3.87}$$

$$\mathbf{n} \cdot rot\mathbf{H}(M,t) = 0, \qquad M \in \Sigma - \bigcup_{k=1}^{n} S_k; \tag{3.88}$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}(M,t) = 0, \qquad M \in S_k, k = \overline{1,n}. \tag{3.89}$$

Condiţia 3.87 evidenţiază absenţa efectului de inducţie electromagnetică în toate punctele suprafeţei Σ, respectiv absenţa cuplajelor magnetice dintre elementul de circuit şi exteriorul acestuia. Această condiţie este îndeplinită dacă pe suprafaţa Σ, componenta normală a inducţiei magnetice $\mathbf{nB}$ este nulă sau constantă în timp.

Condiţia 3.88 impune absenţa curenţilor de conducţie şi de deplasare, în puntele frontierei exterioare bornelor, respectiv impune ca interacţiunea elementului de circuit cu exteriorul, prin cuplaje capacitive sau galvanice să fie realizată exclusiv prin intermediul bornelor. În ipoteza neglijării curentului de deplasare de pe Σ, această condiţie este îndeplinită, dacă elementul de circuit este înconjurat de un izolant străpuns de conductoarele de acces la borne.

Condiţia 3.89 impune ca, pe suprafaţa bornelor, câmpul electric să fie orientat normal, ceea ce va asigura caracterul echipotenţial al fiecărei borne în parte.

Definiţia elementului multipolar de circuit electric impune condiţii doar asupra comportării câmpului electromagnetic de pe frontiera elementului şi nu se referă la structura sa internă sau la regimul în care acesta funcţionează, având un caracter de maximă generalitate. Pe baza acestei definiţii se pot caracteriza, folosind limbajul teoriei circuitelor nu numai elemente cu parametrii concentraţi

ci şi elemente conductoare nefiliforme, cu pierderi suplimentare prin curenţi turbionari sau de natură dielectrică, deci elemente cu parametrii distribuiţi.

Pentru a caracteriza interacţiunea electromagnetică a unui element de circuit cu exteriorul, fiecărei borne i se asociază o pereche de mărimi scalare şi anume intensitatea curentului electric şi potenţialul electric.

Intensitatea curentului electric ce străbate borna $k = 1, 2, ..., n$ este o mărime scalară asociată unui sens de referinţă, definită prin:

$$i_k(t) = \oint_{\Gamma_k} \mathbf{H} d\mathbf{r}, \qquad k = \overline{1, n} \tag{3.90}$$

în care curba închisă $\Gamma_k = \partial S_k \subset \Sigma$ este frontiera suprafeţei bornei S_k. Orientarea curbei Γ_k în conformitate cu regula burghiului drept, faţă de normala exterioară a suprafeţei Σ este echivalentă cu alegerea pentru curentul i_k a sensului de referinţă orientat de la interior spre exterior.

Potenţialul electric al bornei $k = 1, 2, ..., n$ este o mărime fizică scalară definită prin:

$$v_k(t) = \int_{C_k} \mathbf{E} d\mathbf{r}, \tag{3.91}$$

în care $C_k \subset \Sigma$ este o curbă deschisă, inclusă în suprafaţa tensiunilor la borne, al cărui punct iniţial $M \in S_k$ aparţine bornei k iar punctul final aparţine bornei de referinţă (de exemplu borna n).

Condiţia 3.87 din definiţia elementului de circuit garantează caracterul irotaţional al componentei tangenţiale a intensităţii câmpului electric, asigurând invarianţa valorii potenţialului V_k faţă de forma curbei C_k, cu condiţia ca aceasta să nu părăsească suprafaţa Σ, a tensiunii la borne. Condiţia 3.89 asigură independenţa valorii potenţialului unei borne faţă de alegerea punctelor $M \in S_k, N \in S_n$ în interiorul bornelor.

Deoarece punctul final al curbei C_k este ales convenţional, rezultă că potenţialele bornelor sunt relative la alegerea bornei de referinţă, fiind diferite până la o constantă aditivă arbitrară.

Interacţiunea unui element de circuit cu exteriorul este caracterizată complet prin doi vectori n-dimensionali:

$$v = [v_1, v_2, \ldots, v_n]^T, \quad i = [i_1, i_2, \ldots, i_n]^T,$$

ale căror componente sunt potenţialele respectiv intensităţile curenţilor din borne.

Următoare teoremă evidenţiază faptul că aceşti doi vectori sunt suficienţi pentru a caracteriza interacţiunea elementului de circuit cu exteriorul.

Teorema puterii transferate pe la bornele unui element multipolar de circuit electric

Puterea electrică ce traversează frontiera unui element de circuit electric este

egală cu produsul scalar al vectorilor potenţialelor v şi intensităţilor curenţilor i:

$$p(t) = v^T i. \tag{3.92}$$

Sensul convenţional al puterii $p(t)$ este în concordanţă cu sensurile de referinţă adoptate pentru curenţi. Dacă intensităţile curenţilor au sensurile orientate de la exterior spre interior, atunci puterea $p(t)$ este convenţional consumată de element. Această alegere, cunoscută sub numele de *regula de la receptoare*, afirmă că dacă $p(t) > 0$, atunci sensul real al puterii coincide cu cel convenţional, deci este orientat spre element iar dacă $p(t) < 0$, atunci sensul real este opus celui convenţional şi deci părăseşte elementul.

Dacă intensităţile curenţilor au sensurile de referinţă orientate spre exterior, atunci puterea $p(t)$ este convenţional produsă de element. Această alegere este cunoscută sub numele de *regula de la generatoare*.

Pentru demonstrarea teoremei se exprimă vectorul Poynting:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -(gradV) \times \mathbf{H} = V rot\mathbf{H} - rot(V\mathbf{H})$$

în funcţie de potenţialul electric scalar V, definit pe suprafaţa Σ astfel încât $\mathbf{E}_t = (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n} = -gradV$.

Conform teoremei energiei electromagnetice, puterea transferată elementului de circuit este:

$$p(t) = -\oint_\Sigma (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{A} = -\oint_\Sigma V rot\mathbf{H} d\mathbf{A} = -\sum_{k=1}^{n} v_k \int_{S_k} rot\mathbf{H} d\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} v_k(t) i_k(t),$$

deoarece

$$\oint_\Sigma rot(v\mathbf{H}) d\mathbf{A} = \int_{D_\Sigma} divrot(V\mathbf{H}) dv = 0,$$

$$\int_{S_k} rot\mathbf{H} d\mathbf{A} = \int_{\Gamma k} \mathbf{H} d\mathbf{r} = -i_k,$$

presupunând că s-a adoptat regula de la receptoare deci curentul i_k are sensul de referinţă opus sensului elementului de arie $d\mathbf{A}$ (orientat de la interior spre exterior).

Cele n componente ale vectorilor v şi i nu sunt independente, impunând fiecărui vector câte o restricţie. Fluxul nul a vectorului $rot\mathbf{H}$ pe suprafaţa închisă Σ (deoarece $div\ rot\mathbf{H}$) impune:

$$\int_\Sigma rot\mathbf{H} d\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} \int_{S_k} rot\mathbf{H} d\mathbf{A} = -\sum_{k=1}^{n} i_k = 0 \tag{3.93}$$

ca suma intensităţilor curenţilor oricărui element să fie nulă. Această condiţie asigură invariaţia valorii puterii transferate pe la borne, faţă de alegerea bornei de referinţă pentru potenţial:

$$p'(t) = \sum_{k=1}^{n} (v_k + C)\, i_k = \sum_{k=1}^{n} v_k i_k + C \sum_{k=1}^{n} = \sum_{k=1}^{n} v_k i_k = p(t), \tag{3.94}$$

în care p' este puterea calculată folosind valoarea potenţialelor transferată cu constanta arbitrară C.

Pe de altă parte, pentru borna de referinţă, potenţialul are valoare nulă ($v_n = 0$), ceea ce impune ca cel puţin o componentă a vectorului v este identic nulă. În consecinţă, se poate renunţa la câte o componentă atât din vectorul i cât şi din vectorul v, cele 2(n-1) mărimi scalare rămase caracterizând complet interacţiunea elementelor cu exteriorul.

Un caz particular important este elementul dipolar de circuit electric la care numărul de borne este $n = 2$. Interacţiunea cu exteriorul a acestui element este caracterizată de intensitatea curentului electric $i(t) = i_1 = -i_2$ şi de tensiunea la borne $u(t) = v_1 - v_2 = v_1$, deoarece $v_2 = 0$, puterea translatată pe la borne este:

$$p(t) = u(t)i(t).$$

Conceptul de element de circuit (în special cel de element dipolar) este un concept primar al teoriei circuitelor electrice, aşa cum rezultă din următoarea definiţie. Se numeşte **circuit electric** o mulţime de elemente de circuit conectate la borne.

Prin punerea în contact a două borne, suprafeţele bornelor se identifică şi intensităţile curenţilor din cele două elemente sunt egale (cu condiţia ca acestea să aibă orientări diferite, altfel suma celor două intensităţi e nulă).

Topologia unui circuit electric este descrisă prin modul în care sunt conectate elementele de circuit. Aceasta poate fi reprezentată printr-un graf. Fiecare element dipolar de circuit va fi reprezentat printr-o latură în graful circuitului iar fiecare element multipolar de circuit (cu n borne) va fi reprezentat prin $n - 1$ laturi, care leagă primele $n - 1$ borne ale sale cu borna de referinţă. Acest mod de reprezentare este în acord cu observaţia că pentru caracterizarea completă a interacţiunii elementului cu exteriorul sunt suficiente doar mărimile asociate la $n - 1$ borne. Curenţii prin laturile asociate unui element de circuit permit determinarea univocă a curentului prin borna n, a cărei intensitate este egală cu minus suma curenţilor din aceste laturi.

Topologia unui circuit impune anumite restricţii curenţilor şi tensiunilor la bornele elementelor. Acestea sunt evidenţiate de următoarele teoreme aplicate pe graful circuitului, numite din acest motiv formele topologice ale teoremelor lui Kirchhoff.

Prima teoremă a lui Kirchhoff

Suma algebrică a intensităţilor curenţilor din laturile care concură la un nod este nulă:

$$\sum_{k \in (n)}^{A} i_k = 0.$$

Pentru demonstrarea acestei afirmaţii în cazul general, se consideră domeniul D_Σ obţinut prin reuniunea tuturor domeniilor elementelor, care sunt în contact cu borna reprezentată prin nodul (n). Acest domeniu este un element de circuit, deoarece pe suprafaţa Σ astfel obţinută sunt îndeplinite condiţiile din definiţia elementului multipolar de circuit electric. În consecinţă, suma intensităţilor curenţilor prin bornele acestui nou element este nulă, ceea ce trebuia demonstrat.

A doua teoremă a lui Kirchhoff

Suma algebrică a tensiunilor din laturile oricărei bucle a circuitului este nulă:

$$\sum_{k\in[b]}^{A} u_k = 0.$$

Pentru demonstrarea acestei teoreme se porneşte de la observaţia că tensiunea electrică u_k poate fi exprimată ca diferenţa potenţialelor bornelor extreme k_1, k_2:

$$u_k = \int_{C_{k_1k_2}} \mathbf{E}d\mathbf{r} = \int_{C_{k_1k_0}} \mathbf{E}d\mathbf{r} - \int_{C_{k_2k_0}} \mathbf{E}d\mathbf{r} = v_{k_1} - v_{k_2}$$

deoarece tensiunea determinată pe o curbă, aparţinând suprafeţei tensiunilor la borne nu depinde de drumul de integrare. În consecinţă, presupunând că pe bucla $[b]$ toate tensiunile au sensul de referinţă orientat în concordanţă cu sensul de parcurs al buclei, rezultă după reindexare:

$$\sum_{k\in[b]}^{A} u_k = \sum_{k=1}^{m} u_k = \sum_{k=1}^{m} (v_{k1} - v_{k2}) = 0,$$

deoarece prin contact $v_{k2} = v_{(k+1)1}$ pentru orice $k = 1, (m-1)$ şi $v_{11} = v_{m2}$.

În concluzia acestui capitol se poate afirma că teoremele lui Kirchhoff sunt satisfăcute pentru orice circuit electric, indiferent de structura acestuia sau de caracterul elementelor de circuit. Mai mult, dacă un sistem satisface relaţiile lui Kirchhoff, el poate fi analizat cu metodele teoriei circuitelor electrice, deci poate fi considerat un circuit. Un sistem care nu satisface aceste relaţii nu este un circuit. În consecinţă, relaţiile lui Kirchhoff au un caracter axiomatic pentru teoria circuitelor electrice, nefiind necesare alte considerente legate de teoria câmpului electromagnetic. Pentru caracterizarea energetică a elementelor de circuit şi implicit a circuitelor electrice se utilizează relaţia 3.92, sau dezvoltat:

$$p = \sum_{k=1}^{n} v_k i_k, \tag{3.95}$$

relaţie care dă puterea transferată pe la borne de un element de circuit electric.

În teoria circuitelor electrice, relaţiile constitutive, impuse de fiecare element de circuit între curenţi şi tensiuni nu se stabilesc pe cale structurală (a analizei structurii interne a elementului) ci sunt date pe cale axiomatică, problema analizei şi modelării elementelor concrete de circuit depăşind cadrul teoriei circuitelor electrice (aparţinând teoriei câmpului electromagnetic).

3.10 Elemente ideale de circuit electric

3.10.1 Modelarea circuitelor electrice

Printr-un circuit fizic se înţelege o interconexiune a unor dispozitive şi componente concrete cum sunt: rezistoare, bobine, condensatoare, diode, tranzistoare, amplificatoare operaţionale sau alte circuite integrate, baterii , transformatoare, motoare sau generatoare electrice, etc. Scopul teoriei circuitelor este de a prezice comportarea electrică a circuitelor fizice, în vederea îmbunătăţirii performanţelor acestora.

Teoria circuitelor este o disciplină inginerească fundamentală, pe care îşi bazează aplicaţiile multe alte discipline inginereşti, cum sunt electroenergetica, electronica pentru telecomunicaţii sau instrumentaţie, construcţia calculatoarelor şi altele. Pentru a evidenţia evantaiul larg al aplicaţiilor acestei teorii trebuie menţionat că în practică, tensiunile pot varia de la μV (în instrumente de măsură de precizie) la MV (în energetică), iar intensităţile curenţilor au valori între pA (curenţii din antene) şi MA (în cazul scurtcircuitelor din izolaţiile electroenergetice), frecvenţa ia valori cuprinse între 0 (în curent continuu) şi GHz (circuite cu microunde) şi puterea electrică variind între $fW = 10^{-15}W$ (semnalele radio de la galaxii îndepărtate) la MW (puterea generatoarelor din sistemele electroenergetice). În ciuda gamei extinse a aplicaţiilor, fenomenele fizice din interiorul acestor sisteme se supun aceloraşi relaţii. Pentru ca aceste fenomene să fie studiate în limbaj uman este necesară idealizarea comportării diferitelor elemente concrete de circuit, prin reţinerea numai a unora dintre proprietăţile magnetice sau electrice, care se consideră esnţiale şi neglijarea celorlalte. Astfel se obţin elemente de circuit ideale, care reprezintă concepte abstracte şi nu componente fizice. Trebuie făcută distincţia dintre o bobină concretă, realizată dintr-un conductor filiform înfăşurat în jurul unui miez magnetic şi modelul acestei bobine alcătuit dintr-un rezistor înseriat cu o bobină ideală. Această operaţie, prin care componentelor fizile le sunt asociate scheme cu elemente ideale de circuit poartă numele de modelare. În teoria circuitelor electrice nu se operează cu componente fizice concrete ci cu elemente ideale de circuit, care alcătuiesc modele ale acestora. Stabilirea modelelor pentru diferite componente concrete nu reprezintă obiectul teoriei circuitelor electrice, ci al altor discipline inginereşti, cum sunt electronica, teoria maşinilor electrice, teoria aparatelor electrice, etc.

Abaterile pe care le poate avea comportarea unui circuit cu elemente ideale faţă de circuitul fizic real pe care acesta îl modelează se pot datora:

– aproximării cu care sunt satisfăcute ipotezele teoriei circuitelor electrice, respectiv neîndeplinirea exactă a condiţiilor din definiţia elementului multipolar de circuit electric;

– deficienţelor în modelarea componentelor circuitului; ca orice model, şi modelele componentelor sunt aproximative.

De obicei cea de a doua categorie de abateri este mai importantă, situaţie în care se îmbunătăţeşte modelul prin adăugare de noi elemente ideale în schema echivalentă operaţie cunoscută sub numele de succesivă.

Definiţia elementelor ideale de circuit se face într-o manieră funcţională, prin specificarea dependenţei impuse între tensiunea u şi curentul i şi nu într-o manieră structurală (prin specificaţia structurii interne). Evident că se acceptă cele mai simple relaţii posibile între u şi i. De exemplu, pornind de la observaţia că în multe situaţii tensiunea la bornele unui conductor filiform, este proporţională cu intensitatea curentului $u = Ri$ se preia acestă relaţie ca definiţie a unui element ideal de circuit numit rezistor ideal. În realitate nu există nici un element care să satisfacă această relaţie pentru orice valoare a intensităţii.

Orice conductor are o valoare a intensităţii curentului a cărei depăşire duce la distrugerea componentei. Mai mult în cazul componentei, concrete variaţia foarte rapidă a tensiunii la borne face ca intensitatea curentului să nu mai aibă valoare instantanee proporţională cu cea a tensiunii, apărând abateri faţă de comportarea ideală.

Elementele ideale de circuit electric au un dublu statut faţă de componentele fizice. Pe deoparte ele reprezintă idealizări ale unor componente fizice dar pe de altă parte sunt elemente cu care se modelează componentele fizice. se presupune că inventarul elementelor ideale este sufucient de amplu, pentru ca prin combinarea lor să se obţină o schemă care să aproximeze oricât de bine este necesar comportarea componentei concrete.

Elementele ideale de circuit se pot clasifica după mai multe criterii în mai multe categorii. După numărul de borne se deosebesc:

- elemente dipolare cu două borne;
- elemente multipolare cu $n > 2$ borne, dintre acestea un rol important îl au elementele cuadripolare la care $n = 4$.

După tipul relaţiei $u - i$ se deosebesc:

- elemente liniare la care relaţia dintre intensitatea curentului şi tensiune are un caracter liniar;
- elemente neliniare, la care dependenţa $u - i$ nu mai are un caracter liniar.

După comportarea în timp a elementelor ideale de circuit se deosebesc:

- elemente invariante în timp, la care comportarea nu se modifică în timp;
- elemente parametrice, la care relaţa $u - i$ se modifică în timp.

După comportarea energiei se deosebesc:

– elemente pasive, la care puterea consumată este pozitivă;

– elemente active, capabile să producă energie electrică.

Relaţia $u-i$ poate avea un caracter algebric sau diferenţial ceea ce determină clasificarea în:

– elemente rezistive, la care relaţia $u-i$ poate fi caracterizată printr-o funcţie;

– elemente reactive (acumulatoare de energie sau cu memorie), la care relaţia $u-i$ este caracterizată printr-un operator integro-diferenţial.

3.10.2 Elemente dipolare liniare

1. Rezistorul liniar ideal este prin definiţie un element dipolar de circuit electric la care tensiunea la borne este proporţinională cu intensitatea curentului ce străbate elementul. Ecuaţia constitutiva (de funcţionare) este:

$$u = Ri,$$

în care parametrul R, caracteristic rezistorului poartă numele de rezistenţă. Această ecuaţie este valabilă pentru asocierea sensurilor de referinţă, în regula de la receptoere. Prin modificarea sensului de referinţă pentru u sau i semnul mărimii respective se modifică, ceea ce corespunde următoarei ecuaţii constitutive:

$$u = -Ri,$$

valabilă în cazul adoptării regulii de asociere a sensurilor de la generator. De obicei, rezistenă este o mărime pozitivă, dar nu este interzis cazul în care $R < 0$, întâlnit mai ales în modelarea pe porţiuni sau cu mici variaţii a elementelor neliniare de circuit. Semnul minus din cea de a doua formă a ecuaţiei constitutive se datorează regulii de asociere şi nu trebuie interpretată ca o rezistenţă negativă.

Pentru caracterizarea rezistorului se poate folosi şi parametrul $G = 1/R$, numit conductanţă. Ecuaţia constitutivă având în acest caz una din formele:

$$i = -Gu, \; i = -Gu,$$

după cum s-a adoptat regula de asociere a sensurilor tensiunii la receptoare, respectiv generatoare.

Relaţia constitutivă admite o reprezentare grafică în planul $u-i$, ca o dreaptă ce trece prin origine.

Cazuri particulare. Următoarele două cazuri particulare corespund unor rezistoare degenerate, extrem de importante în teoria circuitelor electrice:

– conductorul perfect, la care $R = 0$, ceea ce impune $u = 0$

– izolatorul perfect, la care $G = 0$, ceea ce impune $i = 0$

Caracterizarea energetică. Folosind regula de asociere a sensurilor de la receptoare, puterea transferată la borne este:

$$p = ui = Ri^2 = Gu^2,$$

şi satisface inegalitatea $p \geq 0$, dacă $R > 0$. Aceste rezistoare consumă sistematic energie electrică, motiv pentru care ele se numesc elemente pasive disipative, transferul energetic fiind ireversibil de la circuti la element.

2. Bobina liniară ideală este prin definiţie un element dipolar de circuit electric, la care tensiunea la borne este proporţională cu derivata faţă de timp a intensităţii curentului ce străbate elementul.

Adoptând regula de la receptoare, ecuaţia constitutivă are forma :

$$u = L\frac{di}{dt},$$

în care constanta de proporţionalitate L este un parametru (de obicei pozitiv) caracteristic elementului, numit inductivitatea bobinei.

Adoptând regula de la generatoare, ecuaţia constitutivă are forma :

$$u = -L\frac{di}{dt},$$

se constată că în acest caz, relaţia $u - i$ nu este o funcţie deci nu admite o reprezentare în planul $u - i$. La aceeaşi valoare a curentului pot corespunde care depind de viteza de variaţie în timp a intensităţii în acel moment.

Cazuri particulare. În cazul regimului staţionar $i - 1 = ct$ ecuaţia constitutivă degenerează în ecuaţia conductorului perfect $(u = 0)$. În consecinţă, bobina ideală nu opune nici un fel de rezistenţă trecerii curentului continuu. Aceasta reprezintă principala idealizare a bobinei reale.

Tot într-un conductor perfect $(u = 0)$, degenerează şi bobina a cărei inductivitate este nulă $(L = 0)$.

Caracterizare energetică. Puterea transferată la borne la o bobină la care mărimile sunt asociate conform regulii de la receptoare, deci puterea convenţional consumată este:

$$p = ui = Li\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Li^2\right).$$

În acest caz puterea se poate exprima ca derivata faţă de timp a unei funcţii de stare $w = Li^2/2$, numită energia bobinei.

După cum modelul intensităţii creşte sau scade în timp, puterea consumată este pozitivă sau negativă. Pornind de la o valoare iniţială nulă a curentului,

creşterea monotonă a curentului la valoarea I_{max} în timpul t_0, determină un consum energetic ($p > 0$):

$$W = \int_0^{t_0} p(t)\,dt = \frac{LI^2}{2}.$$

Dacă intensitatea curentului scade monoton de la I la zero puterea electrică $|p| = -p$ este generată şi corespunde unei energii:

$$W = \int_0^{t_0} p(t)\,dt = 0 - \frac{LI^2}{2},$$

egală în modul cu cea consumată. În consecinţă, o bobină ideală poate acumula energie $w = Li^2/2$, ea fiind capabilă să returneze circuitului toată energia consumată. Randamentul acumulării este de 100%, spre deosebire de cazul bobinelor reale la care acest randament este subunitar. Din acest motiv se spune despre bobină că este un element acumulator de enrgie. Deoarece energia produsă nu poate depăşi energia consumată, bobina este considerat un element pasiv de circuit. Totuşi, în anumite momente ($p < 0$), motiv pentru care bobina este considerată un element reactiv, spre deosebire de rezistor care este un element disipativ.

3. Condensatorul liniar ideal, este prin definiţie un element dipolar de circuit electric, la care intensitatea curentului este proporţională cu derivata faţă de timp a tensiunii la borne.

Adoptând regulsa de la receptoare, ecuaţia de funcţionare are expresia:

$$i = C\frac{du}{dt},$$

în care parametrul C (de obicei pozitiv), caracteristic elementului se numeşte capacitatea condensatorului.

Adoptând regulsa de la generatoare, ecuaţia constitutivă are expresia:

$$i = -C\frac{du}{dt}.$$

Şi în acest caz relaţia $u - i$ nu are un caracter funcţional ci unul operaţional.

Cazuri particulare. În regim staţionar ($u = U = ct$), relaţia constitutivă a condensatorului degenerează în $i = 0$, relaţie definitorie pentru izolatorul perfect. Se spune că din acest motiv un condensator ideal nu poate fi străbătut de curentul continuu. Un condensator ideal este străbătut de curent, doar în condiţiile în care tensiunea la bornele sale variază în timp. Valoarea reală a conductanţei unui condensator în regim staţionar este una din principalele idealizări.

Se constată că dacă $C = 0$, condensatorul se comportă tot ca un izolator perfect ($i = 0$).

Caracterizare energetică. Puterea transferată pe la bornele unui condensator cu mărimile asociate cu regula de la receptoare:

$$p = ui = C u \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Cu^2}{2}\right) = \frac{dW}{dt},$$

permite determinarea energiei acumulate

$$W = \frac{Cu^2}{2},$$

mărime pozitiv definită pentru cazul în care $i > 0$.

Această relaţie evidenţiază caracterul pasiv reactiv ($p \gtrless 0$) şi acumulator de energie al condensatorului. Spre deosebire de bobină la care energia se exprima în funcţie de curentul i, la condensator se exprimă în funcţie de tensiunea la borne. Din acest motiv se spune că variabila de stare a unei bobine este intensitatea curentului (i) iar variabila de stare a unui condensator este tensiunea la borne (u). Creşterea în timp a modulului variabilei de stare determină creşterea energieie acumulate, pe seama puterii $p > 0$ consumată de element iar scăderea acestui modul determină scăderea energiei acumulate, puterea $p < 0$, fiind în acest caz, în realitate, generată de element şi consumată de circuit.

4. Sursa ideală de tensiune este prin definiţie un element dipolar de circuit la care tensiunea la borne nu depinde de intensitatea curentului ce-l străbate.

Ecuaţia constittivă a sursei ideale de tensiune are forma:

$$u = e,$$

în care e este un parametru specific sursei (măsurat tot în V) numit tensiune electromotoare (prescurtat t.e.m.). Tensiunea electromotoare nu depinde de variaţia curentului, dar poate fi funcţie de timp.

Cu toate că cele două mărimi fizice u şi e sunt egale, se face deosebire între tensiunea la bornele sursei (măsurată cu un voltmetru conectat la borne) şi tensiunea electromotoare internă, specifică sursei şi independentă de modul de conexiune al voltmetrului.

La schimbarea sensului de referinţă al tensiunii, ecuaţia de funcţionare îşi modifică forma:

$$u = -e,$$

indiferent care este sensul de referinţă al curentului.

În cazul rezistorului, bobinei sau condensatorului liniar, modificarea simultană a sensurilor de referinţă pentru tensiune şi curent lasă invariantă ecuaţia de funcţionare, motiv pentru care se spune că aceste elemente au bornele nepolarizate. Spre deosebire de acestea sursa ideală de tensiune are bornele polarizate.

Pentru a deosebi cele două borne ale sursei, una se marchează cu "+" iar cealaltă cu "-". Tensiunea la borne este egală cu tensiunea electromotoare doar

dacă ea are sensul de referinţă orientat de la borna "+" la borna "-": $u = v_+ - v_- = e$. În caz contrar tensiunea la borne este minus t.e.m. $u' = -u = v_- - v_+ = -e$. Se constată că forma ecuaţiei constitutive nu depinde de regula de asociere a sensurilor (curentul neavând nici un rol în definiţia acestui element) ci de felul în care este orientată tensiunea faţă de bornele polarizate (sau faţă de săgeata internă, specifică t.e.m.).

În planul $u - i$ relaţia constitutivă a sursei ideale de tensiune se reprezintă ca o dreaptă orizontală, care nu trece în mod necesar prin origine.

Cazuri particulare. În regim staţionar, tensiunea electromotoare a sursei se notează cu E, ecuaţia de funcţionare fiind $v = \pm E$, conform sensului de referinţă al tensiunii la borne.

Dacă $e = 0$, sursa degenerează într-un conductor perfect ($u = 0$), caz în care se spune că sursa este pasivizată.

Valoarea nulă a rezistenţei interne a unei surse ideale de tensiune pasivizate reprezintă idealizarea principală specifică acestui element.

Caracterizare energetică. Puterea transferată pe la borne de o sursă ideală de tensiune este:

$$p = ui = ei.$$

Presupunând că $u = e > 0$ şi $i > 0$ sunt asociate în regula de la receptoare, rezultă că $p > 0$ este o putere reală consumată de sursă. Dacă intensitatea curentului îşi modifică semnul, atunci $p < 0$ iar sursa trece din regim de consumator în regim de generator. În consecinţă la acest element $p \gtrless 0$, ceea ce evidenţiază caracterul lui activ. Trecerea de la un regim la altul este dictată de sensul curentului.

5. Sursa ideală de curent este prin definiţie un element dipolar de circuit electric, la care intensitatea curentului nu depinde de tensiunea la bornele sale.

Sursa ideală de curent este un element cu bornele polarizate, a cărui relaţie constitutivă are forma:

$$i = j,$$

atunci când intensitatea curentului este orientată de la borna "-" la borna "+" prin element şi

$$i = -j,$$

în caz contrar. Parametrul j specific elementului este numit curent electromotor (prescurtat c.e.m.) şi nu depinde de tensiunea la borne, fiind del mult funcţie de timp.

Se constată că atunci când sensull de referinţă al curentului coincide cu sensul curentului electromotor, relaţia are forma $i = j$ şi respectiv forma $i = -j$ în caz contrar. Forma relaţiei nu depinde de sensul tensiunii la borne, nu depinde nici de regula de asociere adoptată.

În planul $u - i$ relaţia constitutivă a sursei ideale de curent se reprezintă ca o dreaptă verticală, care nu trece în mod necesar prin origine.

Cazuri particulare. În regim staţionar curentul electromotor se notează cu J, ecuaţia de funcţionare având una din formele $I = \pm J$, în funcţie de sensul de referinţă al curentului.

Dacă $j = 0$, sursa degenerează într-un izolator perfect (i = 0), caz în care se spune că sursa este pasivizată.

Valoarea reală a conductanţei interne a unei surse de curent pasivizată reprezintă idealizarea principală a acestui element de circuit electric.

Caracterizare energetică. Puterea transferată pe la borne de o sursă ideală de curent este:

$$p = ui = uj.$$

Deoarece aceasta poate avea atât valori pozitive cât şi negative, elementul poate consuma sau genera energie electrică. Din acest motiv sursa ideală de curent intră în categoria elementelor active. Regimul energetic al acestei surse (consumator sau generator) este dictat de semnul tensiunii la borne. Dacă $u > 0$ şi $i = j > 0$ sunt asociate în regula de la generatoare atunci $p = u \cdot j$ este o putere real generată iar dacă $u < 0$, atunci $|p| = |u|j = -p$ este puterea consumată de element.

Cele cinci elemente anterior definite reprezintă cele mai frecvent utilizate elemente în aplicaţiile practice ale teoriei circuitelor electrice. Circuitele electrice constituite cu acestea se numesc **circuite electrice liniare** cu elemente dipolare (sau circuite RLCEJ).

Aplicaţia 1: Modelarea generatorului real.

Se consideră un element dipolar de circuit electric numit generator real a cărui caracteristică în planul u-i se reprezintă printr-o dreaptă ce nu trece prin origine. Se presupune că dreapta caracteristică a acestui element intersectează axele în punctele U_0 şi I_0. Aceste valori corespund tensiunii de mers în gol ($i = 0$) şi respectiv curentului de scurtcircuit ($u = 0$) ale generatorului. Se pune problema determinării modelului acestui element, ca un circuit cu elemente ideale dipolare liniare.

Ecuaţia dreptei în planul $u - i$:

$$u = U_0 - \frac{U_0}{I_0} i,$$

permite identificarea a două tensiuni:

$$u_1 = U_0, \;\; u_2 = -\frac{U_0}{I_0} i,$$

astfel încât $u = u_1 + u_2$.

Prima tensiune $u_1 = U_0$ fiind independentă de intensitatea curentului corespunde unei surse ideale de tensiune, cu t.e.m. $E = U_0$, iar a doua tensiune $u_2 = -(U_0 i)/I_0$ fiind proporţională cu intensitatea i a curentului prin element corespunde unui rezistor liniar ideal cu rezistenţa $R = U_0/I_0$, la care U_0 şi I_0

sunt asociate în regula de la generatoare. Relaţia $u = u_1 + u_2$ corespunde conexiunii serie a celor două elemente (R, E) ideale. În consecinţă un generator real admite o schemă echivalentă formată dintr-o sursă ideală de tensiune înseriată cu un rezistor liniar. Această schemă se numeşte sursă reală de tensiune. Tensiunea electromotoare E a sursei ideale este egală cu tensiunea de mers în gol şi se numeşte tensiunea electromotoare a generatorului. Rezistenţa $R = U_0/I_0$ egală cu raportul dintre tensiunea de mers în gol şi curentul de scurtcircuit al generatorului se numeşte rezistenţa internă a generatorului.

Schema echivalentă obţinută nu este singura schemă cu două elemente. Dacă se exprimă ecuaţia de funcţionare a generatorului sub forma:

$$i = I - 0 - \frac{I_0}{U_0}u,$$

atunci se pot deosebi termenii $i_1 = I - 0$ şi $i_2 = -(I_0 u)/U_0$, care satisfac relaţia $i = i_1 + i_2$. Primul termen $i_1 = I - 0$, fiind independent de valoarea tensiunii la borne corespunde unei surse ideale de curent, cu c.e.m. egal cu curentul de scurtcircuit al generatorului $J = I_0$. Al doilea curent $i_2 = -(I_0 u)/U_0$ fiind proporţională cu tensiunea la borne corespunde unui rezistor în regula de la generatoare având conductanţa $G = I_0/U_0$, egală cu raportul dintre curentul de scurtcircuit şi tensiunea de mers în gol ale generatorului. Relaţia $i = i_1 + i_2$ impune ca cele două elemente ideale (G, I) să fie conectate în paralel. Această schemă echivalentă este cunoscută sub numele de sursă reală de curent. Cei doi parametrii ai sursei reale de curent sunt J - curentul electromotor şi G - conductanţa internă.

În consecinţă un generator real de curent admite două scheme echivalente între ele şi echivalente cu generatorul, una de tip sursă reală de tensiune (cu parametrii $E = U_0$, $R = U_0/I_0$) şi alta de tip sursă reală de curent (cu parametrii $J = I_0$, $G = 1/R = I_0/U_0$).

Se constată că sursele ideale sunt idealizări ale generatorului real. Sursa ideală de tensiune corespunde cazului în care rezistenţa internă este nulă (iar curentul de scurtcircuit tinde către infinit) pe când sursa ideală de curent corespunde cazului în care conductanţa intern;a este nulă (rezistenţa internă tinde spre infinit o dată cu tensiunea de mers în gol).

Aplicaţia 2: Modelarea condensatorului cu tensiune iniţială nenulă.

Fie un condensator care la momentul iniţial $t = 0$ are valoarea tensiunii la borne $u_0 = u(0)$.

Integrând ecuaţia de funcţionare a condensatorului

$$i = C\frac{du}{dt},$$

pe intervalul (0,t) se obţine:

$$\int_0^t i(t')dt' = C\int_0^t \frac{du}{dt'}dt' = Cu(t) - Cu(0),$$

deci,

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt'.$$

Notând $u_1 = u_0$ şi $u_2 = \frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt'$, rezultă că $u(t) = u_1 + u_2$, ceeace corespunde conexiunii serie a unei surse ideale de tensiune cu t.e.m. u_0 şi un condensator iniţial descărcat, cu ecuaţia $i = C\dfrac{du_2}{dt}$, în care $u_2(0) = 0$, deci iniţial neâncărcat.

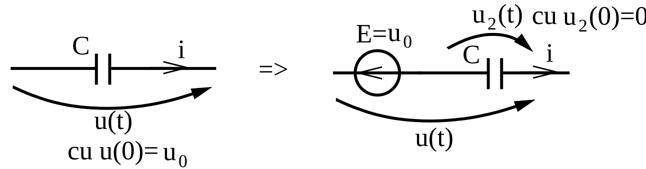


Fig. 3.1.

Aplicaţia 3: Modelarea bobinei cu, curent iniţial nenul.

Fie o bobină care la momentul iniţial $t = 0$ are intensitatea curentului $i(0) = i_0$.

Integrând ecuaţia de funcţionare a bobinei:

$$u = L\frac{di}{dt},$$

pe intervalul (0,t) se obţine:

$$\int_0^t u(t')dt' = L\int_0^t \frac{di}{dt'}dt' = Li(t) - Li(0).$$

Notând $i_1 = i(0) = i_0$ şi $i_2 = \frac{1}{L}\int_0^t u(t')dt'$, rezultă că $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$, ceea ce corespunde conexiunii paralel a unei surse ideale de curent cu c.e.m. i_0 şi o bobină cu ecuaţia $u = L\dfrac{di_2}{dt}$, la care $i_2(0) = 0$, deci iniţial neparcursă de curent.

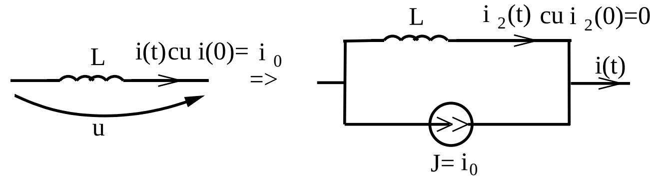


Fig. 3.2.

3.10.3 Elemente dipolare neliniare

1. Rezistorul ideal neliniar este un element dipolar de circuit la care valoarea intensităţii curentului de la un moment de timp este într-o relaţie algebrică cu tensiunea din acel moment de timp. Ecuaţia de funcţionare a rezistorului neliniar poate fi scrisă sub forma:

$$F(i, u) = 0.$$

În planul $u-i$ relaţia constitutivă a rezistorului neliniar se reprezintă de regulă printr-o curbă.

Se deosebesc două cazuri particulare importante.

Rezistorul controlat în curent, este un element dipolar de circuit la care tensiunea la borne este funcţie (în sens matematic) de intensitatea curentului ce străbate elementul. Considerând adoptată regula de asociere a sensurilor de la receptoare, ecuaţia de funcţionare a rezistorului controlat în curent are forma:

$$u = f(i),$$

în care $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este funcţia caracteristică $u - i$ a elementului.

Rezistorul controlat în tensiune, este un element dipolar de circuit la care intensitatea curentului este funcţie (în sens matematic) de tensiunea la borne. Asociind a sensurile de referinţă în regula de la receptoare, ecuaţia de funcţionare a rezistorului controlat în tensiune are forma:

$$i = g(u),$$

în care $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este funcţia caracteristică $i - u$ a elementului.

Dacă funcţia caracteristică este bijectivă, atunci $f = g^{-1}$ şi rezistorul neliniar este controlat atât în tensiune cât şi în curent.

Spre deosebire de rezistorul liniar, care are bornele nepolarizate cel neliniar are, în general, bornele polarizate. Simbolul ales pentru acest element evidenţiază această proprietate, nefiind simetric faţă de un plan transversal (fig. 3).

Totuşi, dacă funcţia caracteristică este simetrică $f(-i) = -f(i)$ sau $g(-u) = -g(u)$, cele două borne ale rezistorului neliniar sunt echivalente iar polarizarea bornelor nu are semnificaţie.

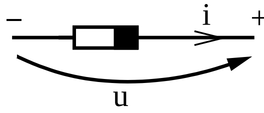


Fig. 3.3.

Rezistoarele liniare sunt cazuri particulare ale rezistoarelor neliniare. Exceptând cazurile degenerate rezistoarele liniare sunt controlate atât în tensiune cât şi în curent. În schimb, conductorul perfect este controlat în curent, iar izolatorul perfect este controlat în tensiune. Sursa reală poate fi considerată şi ea un rezistor neliniar controlat atât în curent cât şi în tensiune. În particular, sursa ideală de tensiune este un rezistor neliniar controlat în curent, iar sursa ideală de curent este un rezistor neliniar controlat în tensiune.

Comportarea unui rezistor neliniar poate fi descrisă cu ajutorul funcţiilor caracteristice, dar şi folosind următoarele funcţii.

Rezistenţa statică a unui rezistor:

$$R_s = \frac{u}{i},$$

care este o funcţie de intensitatea curentului $R_s = R_s(i) = f(i)/i$ sau de tensiunea la borne $R_s = R_s(u) = u/g(u)$.

Conductanţa statică a unui rezistor:

$$G_s = \frac{i}{u},$$

care este inversa rezistenţei statice.

Rezistenţa diferenţială (dinamică):

$$R_d = \frac{du}{di},$$

definită ca derivata funcţieie caracteristice $f(i)$.

Conductanţa diferenţială (dinamică):

$$G_d = \frac{di}{du},$$

definită ca derivata funcţieie caracteristice $g(u)$.

În cazul particular, al rezistorului liniar, $R_s = R_d = R = 1/G = 1/G_d = 1/G_s$ cu valori constante, independente de u sau i.

În cazul sursei reale $R_d = R(G_d = 1/R)$, rezistenţa dinamică este egală cu cea internă. "in cazul particular al sursei ideale rezistenţa dinamică este nulă (pentru sursa de tensiune) sau conductanţa dinamică este nulă (pentru sursa de curent).

Rezistoare neliniare tipice

Dioda semiconductoare este un element dipolar de circuit frecvent întâlnit în electronică. Aceasta poate fi modelată suficient de bine printr-un rezistor neliniar, cu caracteristica (fig. 4)

$$i = I_s[e^{u/V_T} - 1],$$

în care I_s şi V_T sunt constante numite curent de saturaţie respectiv tensiune termică. Acest rezistor este controlat în tensiune, funcţia caracteristică:

$$e^{u/V_T} = \frac{i}{I_S} + 1 \Rightarrow u = V_T \ln\left(\frac{i}{I_S} + 1\right),$$

nefiind definită pe întreaga axă reală $i \in \mathbb{R}$.

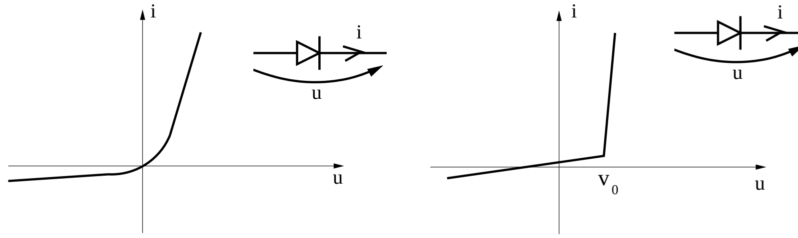


Fig. 3.4.

Conductanţa dinamică a diodei semiconductoare are valori foarte mici pentru tensiuni negative

$$G_d = \frac{I_S}{V_T} e^{u/V_T},$$

dar valori tot mai mari pe măsură ce tensiunea creşte. Graficul relaţiei $u - i$ depinde de felul în care au fost alese sensurile de referinţă pentru u şi i. Un mod uzual de exprimare a caracteristicii diodei semiconductoare corespunde aproximării liniare pe porţiuni:

$$i = \begin{cases} G_i u, & u \leq U_0 \\ G_i V_0 + G_d(u - v_0), & u > v_0. \end{cases}$$

Un astfel de model este caracterizat de trei parametrii: conductanţa în polarizare inversă G_i, conductanţa în polarizare directă G_d şi tensiunea de stingere v_0. Se constată că spre deosebire de modelul anterior, noul model poate fi considerat comandat atât în curent cât şi în tensiune. În polarizare inversă, dioda se comportă ca un rezistor liniar cu rezistenţa foasrte mare, iar în polarizare directă ($u > v_0$) o sursă reală cu rezistenţa internă mică. Neglijând conductanţa inversă $G_i = 0$ şi rezistenţa directă $R_d = 1/G_d = 0$, rezultă un alt model caracterizat doar prin tensiunea de stingere v_0 (fig. 5)

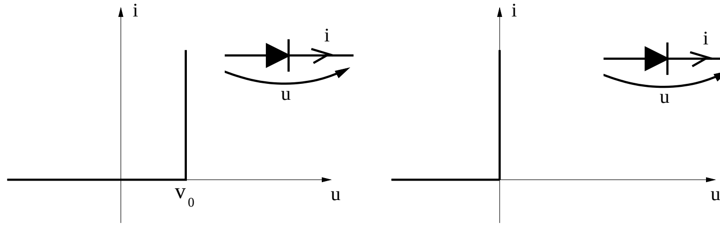


Fig. 3.5.

Dacă se consideră tensiunea de frângere nulă $v_0 = 0$, atunci se obţine cel mai simplu model pentru dioda semiconductoare, numită diodă perfectă, descris prin:

$i = 0$ pentru $u < 0$

$u = 0$ pentru $i > 0$

Ultimele două modele ce reprezintă rezistoare neliniare nu sunt controlate nici în curent nici în tensiune. În polarizare inversă, aceste rezistoare se comportă ca izolatoare perfecte. Curentul electric nu pote străbate aceste diode decât intr-un singur sens, cel evidenţiat de simbolul diodei.

Dioda stabilizatoare de tensiune (zenner) este un element dipolar de circuit a cărui caracteristică $u - i$ este prezentată în (fig. 6). Se constată că acesta este comandată atât în tensiune cât şi în curent.

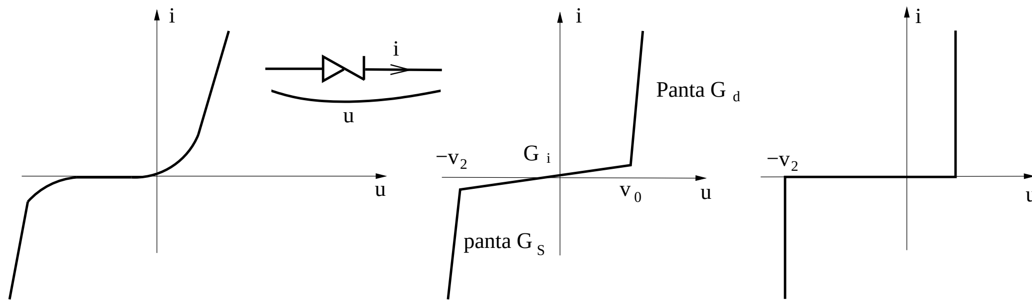


Fig. 3.6.

Caracteristica sa are trei zone, două în polarizare inversă, zona Zener (cu rezistenţă dinamică neglijabilă), zona de blocare (cu conductanţă dinamică neglijabilă) şi o zonă de polarizare directă, cu rezistenţă dinamică neglijabilă. Folosind aproximări liniare pe porţiuni caracteristica diodei zenner capătă forma din (fig. 6.b). Prin idealizare, se poate considera $R_2 = 1/G_2 = 0, G_i = 0, R_d = 1/G_d = 0$ şi $v_0 = 0$, observându-se caracteristica din (fig. 6.c). În zona Zener ($i < 0$) acest

model perfect se comportă ca o sursă ideală de tensiune $u = -v_2$, în zona de blocare ($-v_2 < u < 0$) el se comportă ca un izolator perfect ($u = 0$).

Dioda tunel este un element dipolar cu o caracteristică de tipul celei din (fig. 7)

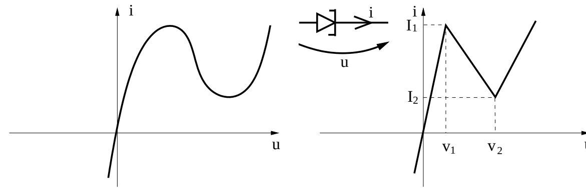


Fig. 3.7.

Se constată că elementul este controlat în tensiune şi prezintă trei zone pe caracteristică, în zona a doua rezistenţa dinamică fiind negativă.

Dioda tiristor este un element dipolar de circuit cu o caracteristică de tipul celei din figură 8.

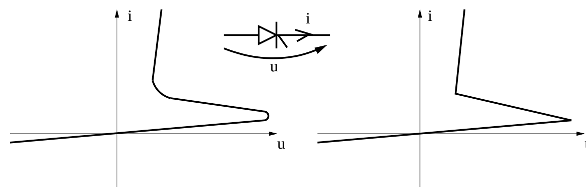


Fig. 3.8.

Se constată că acest element este un rezistor neliniar comandat în curent. Caracteristica sa conţine trei zone, prima în care elementul este blocat (prezintă o conductanţă neglijabilă), o zonă cu rezistenţă negativă şi o zonă de conducţie, în care rezistenţa dinamică neglijabilă, caracteristica sa poate fi aproximată liniar pe porţiuni, ca în figura 8.b.

Tubul fluorescent cu neon este un element dipolar de circuit cu o caracteristică de tipul celei din figură 9.

Acest element este comandat tot în curent, dar are caracteristica simetrică faţă de origine, deci bornele nepolarizate.

Caracteristica energetică a rezistoarelor neliniare Puterea transferată pe la borne de un rezistor neliniar este:

$$p = ui.$$

Dacă această putere este pozitivă, în regula de la receptoare, elementul dipolar este pasiv.

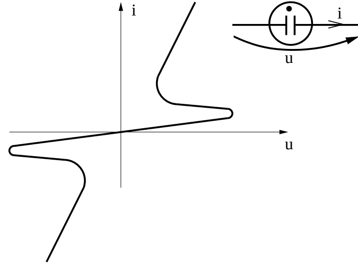


Fig. 3.9.

În acest caz tensiunea u şi curentul i trebuie să aibă în fiecare moment acelaşi semn. Rezultă că rezistoarele neliniare ale căror caracteristică în regula de la receptoare, este cuprins exclusiv în cadranele 1 şi 3 ale planului $u{-}i$, sunt elemente pasive. Această condiţie obligă ca la tensiune nulă $u = 0$ să corespundă un curent nul $i = 0$ (originea face parte din spaţiu caracteristicii).

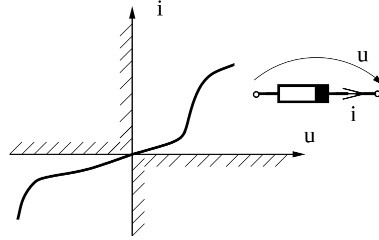


Fig. 3.10.

Dacă aceeaşi proprietate $\Delta u \cdot \Delta i > 0$ este satisfăcută pentru orice punct M de pe caracteristica (fig. 11) se spune că rezistorul este local pasiv. Un astfel de rezistor trebuie să aibă în plus caracteristica monotonă (conductanţa sau rezistenţa dinamică trebuie să fie pozitive în orice punct).

2. **Bobina ideală neliniară** este un element bipolar de circuit caracterizat în regula de asociere a sensurilor de la receptoare prin ecuaţia:

$$u = \frac{d\varphi}{dt},$$

în care φ este o variabila numită fluxul bobinei, aflată într-o relaţie $f(\varphi, i) = 0$ cu intensitatea curentului din bobină. Se deosebesc două cazuri particulare:

– Bobina controlată în curent la care:

$$\varphi = \widehat{\varphi}(i).$$

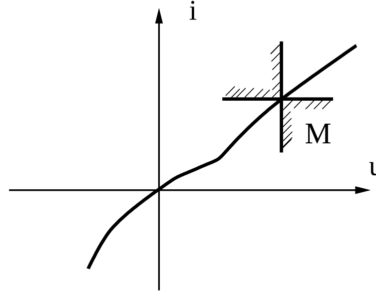


Fig. 3.11.

– Bobina controlată în flux:

$$i = \widehat{i}(\varphi).$$

Bobinele a căror caracteristică $\varphi - i$ este simetrică faţă de origine $f(-\varphi, -i) = f(\varphi, i)$ au bornele nepolarizate. Simbolul general al bobinei neliniare este cel din figura 12.

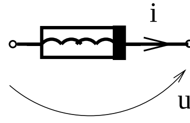


Fig. 3.12.

În afara funcţiilor $f(\varphi, i)$, $\widehat{\varphi}(i)$ sau $\widehat{i}(\varphi)$, pentru caracterizarea bobinelor neliniare se mai folosesc:

– inductivitatea statică: $L_s = \dfrac{\varphi}{i} = \dfrac{\widehat{\varphi}(i)}{i}$;

– inductivitatea dinamică: $L_d = \dfrac{d\varphi}{di} = \widehat{\varphi}'(i)$;

– inductivitatea reciprocă statică: $\Gamma_s = \dfrac{i}{\varphi} = \dfrac{\widehat{i}(\varphi)}{\varphi}$;

– inductivitatea reciprocă dinamică: $\Gamma_d = \dfrac{di}{d\varphi} = \widehat{i}'(\varphi)$.

Bobina liniară este un caz particular al bobinei neliniare, la care $L_s = L_d = 1/\Gamma_s = 1/\Gamma_d = L$.

Elementul dipolar neliniar cu caracter inductiv este bobina cu miez feromagnetic, la care neliniaritatea se datoreşte dependenţei **B** - **H** specifice acestor materiale.

În cazul mediilor feromagnetice moi, dependenţa φ - i are forma tipică din figura 13.a, care poate fi aproximată prin una din relaţiile:

$$\varphi = \frac{L}{a + b(i)},$$

$$i = a\varphi + b\varphi^3,$$

$$\varphi = a + h(bi),$$

sau liniar pe cele trei porţiuni (13.b)

$$\varphi = \begin{cases} L_1(i + i_0) - L_0 i_0, & i < -i_0 \\ L_0 i, & -i_0 \le i \le i_0 \\ L_1(i - i_0) + L_0 i_0 & i > i_0. \end{cases}$$

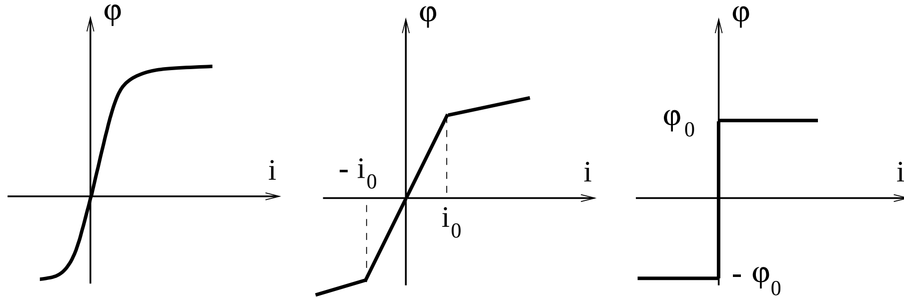


Fig. 3.13.

Această caracteristică de magnetizaţie poate fi simplificată considerând $L_1 = 0$, $i_0 = 0$ cu $\varphi_0 = L_0 i_0$ finit, ceea ce corespunde relaţiei $\varphi = \varphi \cdot \mathrm{sgn}(i)$, reprezentat grafic în figura 13.c.

Un alt element de circuit care poate fi modelat printr-o bobină neliniară este joncţiunea supraconductoare (Josephson), la care $i = I_0 \sin k_0 \varphi$, elementul fiind controlat în flux. Un fenomen mai dificil de modelat este fenomenul de histerezis, specific bobinelor cu miez feromagnetic dur. În acest caz, relaţia φ - i nu poate fi reprezentată printr-o funcţie univoca (figura 14).

Pentru caracterizarea energetică, atunci bobina se va calcula puterea consumată de bobină:

$$p = ui = i\frac{d\varphi}{dt}. \tag{3.96}$$

Considerând o bobină care la momentul $t = 0$ are starea iniţială caracterizată prin $i = i_0$ şi $\varphi = \varphi_0$, rezultă că energia transferată bobinei în intervalul $(0, t)$ este:

$$W = \int_0^t p dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \widehat{i}(\varphi') d\varphi',$$

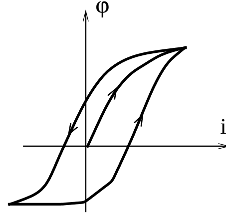


Fig. 3.14.

pentru cazul bobinei controlate in flux şi:

$$W = \int_0^t pdt = i\varphi - i_0\varphi_0 - \int_{i_0}^{i} \widehat{\varphi}(i')di',$$

în cazul bobinei controlate în curent.

Se constată că dacă starea finală este identică cu cea iniţiala ($i = i_0$, $\varphi = \varphi_0$) energia transferată este nulă, ceea ce evidenţiază caracterul pasiv, nedisipativ, acumulator de energie al bobinei ideale neliniare. Această afirmaţie nu este valabilă în cazul bobinelor cu histerezis care au un caracter disipativ.

3. **Condensatorul ideal neliniar** este un element dipolar de circuit, caracterizat în regula de asociere de la rezistoare prin ecuaţia:

$$i = \frac{dq}{dt}, \tag{3.97}$$

în care q este o variabilă numită sarcina condensatorului, aflată într-o relaţie $f(q, u) = 0$ cu tensiunea de la bornele elementului. Se deosebesc două cazuri particulare:

– condensatorul controlat în tensiune, la care:

$$q = \widehat{q}(u), \tag{3.98}$$

– condensatorul controlat în sarcină, la care:

$$u = \widehat{u}(q), \tag{3.99}$$

Condensatoarele la care caracteristica $q - u$ este simetrică faţă de origine au bornele nepolarizate. Simbolul general al condensatorului neliniar este prezentat în figura 15

Condensatorul neliniar mai poate fi caracterizat prin următoarele funcţii:

– capacitatea statică: $C_s = \dfrac{q}{u} = \dfrac{\widehat{q}(u)}{u}$,

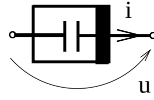


Fig. 3.15.

– capacitate statică reciprocă: $S_s = \dfrac{u}{q} = \dfrac{\widehat{u}(q)}{q}$,

– capacitate dinamică: $C_d = \dfrac{dq}{du} = \widehat{q}'(u)$,

– capacitate dinamică reciprocă: $S_d = \dfrac{du}{dq} = \widehat{u}'(q)$.

În cazul particular al condensatorului liniar $C = C_s = C_d = 1/S_s = 1/S_d$.

Dintre elementele reale, cel care se poate modela printr-un condensator neliniar este dioda caricap, la care:

$$q(u) = -\frac{3}{2}C_0U_0\left(1 - \frac{u}{U_0}\right)^{\frac{2}{3}},\ u < U_0.$$

În practică se întâlnesc şi condensatoare cu dielectrice prezentând fenomenul de histerezis, care nu pot fi caracterizate printr-o funcţie biunivocă $q - u$.

Energia transferată unui condensator în intervalul $(0, t)$ este:

$$W = \int_0^t pdt = \int_{q_0}^q \widehat{u}(q)dq,\ q_0 = q(0), \tag{3.100}$$

pentru condensatoarele controlate în sarcina, şi:

$$W = \int_0^t pdt = qu - q_0u_0 - \int_{u_0}^u \widehat{q}(u)du,\ u_0 = u(0), \tag{3.101}$$

pentru condensatoarele controlate în tensiune. În cazul transformărilor ciclice ($u = u_0$, $q = q_0$) se constată că energia totală transferată este nulă $W = 0$, ceea ce evidenţiază caracterul pasiv, nedisipativ şi acumulator de energie al acestor elemente.

3.11 Elemente dipolare parametrice

1. Rezistorul parametric este un element dipolar de circuit a cărui relaţie tensiune - curent este dependentă de timp. Relaţia caracteristică a acestui element are forma:

$$F(u, i, t) = 0. \tag{3.102}$$

Rezistorul neliniar parametric controlat în curent are ecuaţia:

$$u = f(i, t), \tag{3.103}$$

iar rezistorul neliniar parametric controlat în tensiune are ecuaţia:

$$i = g(u, t). \tag{3.104}$$

Simbolul general al unui rezistor neliniar parametric este reprezentat în figura 16

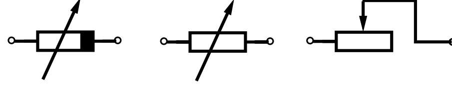


Fig. 3.16.

Dacă funcţia caracteristică este simetrică faţă de origine $F(-u, -i) = F(u, i)$ atunci elementul are bornele nepolarizate. În particular, rezistorul liniar parametric are ecuaţia:

$$u = R(t) - i, \; i = G(t) - u, \tag{3.105}$$

şi simbolul din figura 16.

Un exemplu tipic de rezistor liniar parametric este rezistorul (figura 16) realizat dintr-un rezistor cu cursor, a cărui rezistenţă depinde de poziţia cursorului. Dacă se presupune o mişcare oscilatorie, cu pulsaţia ω, a cursorului, rezistenţa reostatului este:

$$R(t) = R_0 + R_m \sin \omega t.$$

Un alt exemplu tipic de rezistor parametric este întrerupătorul ideal (figura 17), care poate avea două stări:



Fig. 3.17.

– închis, caz în care este echivalent cu un conductor perfect ($R = 0$, $U = 0$);

– deschis, caz în care este echivalent cu un izolator perfect ($G = 0$, $i = 0$).

Acest element este important deoarece prezenţa lui în circuit poate modifica topologia reţelei, deoarece în funcţie de poziţia sa adaugă sau elimină laturi din circuit.

2. Bobina parametrică este un element dipolar de circuit electric a cărui relaţie flux - curent este dependentă de timp. Relaţiile constitutive ale bobinei sunt:

$$u = \frac{d\varphi}{dt},\ F(\varphi, i, t) = 0. \tag{3.106}$$

Dacă funcţia caracteristică F poate fi adusă sub forma: $\varphi = \widehat{\varphi}(i,t)$ se spune ca elementul este controlat în curent. Dacă funcţia caracteristică F poate fi adusă sub forma: $i = \widehat{i}(\varphi, t)$ se spune ca bobina este controlată în flux. Simbolul general al bobinei neliniare parametrice este prezentat în figura 18.

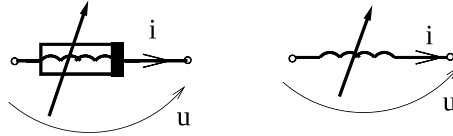


Fig. 3.18.

În cazul particular al bobinei parametrice liniare, fluxul depinde liniar de intensitatea curentului: $\varphi = L(t) \cdot i$, constanta de proporţionalitate, numită inductivitate parametrică, fiind dependenta timp. (figura 18)

Funcţia de funcţionare are, în acest caz forma:

$$u = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L\frac{di}{dt} + i\frac{dL}{dt}. \tag{3.107}$$

Se constată că tensiunea la bornele bobinei parametrice are faţă de tensiunea la bornele bobinei liniare invariante, un termen suplimentar de natură parametrică.

Un exemplu tipic de bobină parametrică este bobina cu miez mobil, folosită insuşi ca traductor de poziţie. Modificarea poziţiei miezului determină modificarea inductivităţii. De exemplu, dacă miezul are mici oscilaţii armonice, de pulsaţie ω:

$$L(t) = L_0 + L_m \sin \omega t.$$

O astfel de bobină, chiar străbătută de un curent continuu $i = I$, are o tensiune nenulă la borne:

$$u(t) = I L_m \omega \cos \omega t.$$

3. Condensatorul parametric este un element dipolar de circuit a cărui relaţie sarcina - tensiune este dependentă de timp. Relaţiile constitutive ale acestui element are forma:

$$i = \frac{dq}{dt},\ F(q, u, t) = 0. \tag{3.108}$$

Condensatorul neliniar parametric controlat în tensiune are funcţia caracteristică F de forma:

$$q = \widehat{q}(u,t), \tag{3.109}$$

iar condensatorul neliniar parametric controlat în sarcină are funcţia caracteristică F de forma:

$$u = \widehat{u}(q,t). \tag{3.110}$$

Simbolul general al condensatorului neliniar parametric este reprezentat în figura 19.

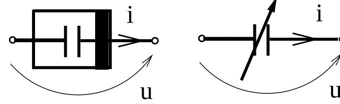


Fig. 3.19.

În cazul particular al condensatorului liniar parametric, sarcina depinde liniar de tensiune $q = C(t) \cdot u$, constanta de proporţionalitate, numită capacitate parametrică, fiind variabilă în timp (figura 19). Ecuaţia de funcţionare are în acest caz forma:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu)}{dt} = C\frac{du}{dt} + u\frac{dC}{dt}, \tag{3.111}$$

conţinând un termen suplimentar $u\frac{dC}{dt}$, de natură parametrică.

Un exemplu tipic de condendator liniar parametric îl reprezintă condensatorul cu armături mobile. Prin modificarea poziţiei unei armături se modifică şi capacitatea condensatorului.

3.12 Elemente multipolare liniare

Cel mai simplu element multipolar este elementul tripolar, cu trei borne. Totuşi, pentru a asigura o maximă flexibilitate în modelarea elementelor multipolare reale, se preferă ca elementele multipolare ideale să aibă patru borne. La aceste elemente cuadripolare, bornele se grupează în două perechi numite porţi, astfel încât $i_1 = i_1' = i_1''$ şi $i_2 = i_2' = i_2''$ (figura 20).

În consecinţă, poarta de intrare va fi caracterizată prin perechea tensiune - curent (u_1, i_1), iar poarta de ieşire prin perechea (u_2, i_2). Cuadripolii diporţi se reprezintă în graful circuitului prin două laturi, corespunzătoare celor două porţi (figura 20).

Elementele cuadripolare de circuit impun anumite relaţii între cele patru mărimi caracteristice u_1, u_2, i_1, i_2. În cazul elementelor liniare aceste relaţii au un caracter liniar.

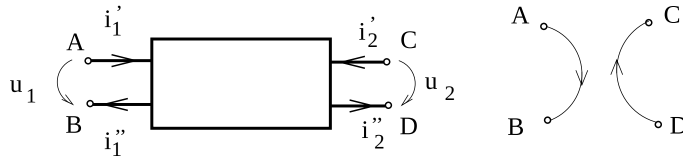


Fig. 3.20.

Următoarele patru elemente multipolare, numite surse comandate alcătuiesc un set complet, cu care se poate modela funcţionarea elementelor reale multipolare liniare.

Sursa de tensiune comandată în tensiune este un element diport de circuit la care poarta de intrare se comportă ca un izolator perfect, iar tensiunea la poarta de ieşire este proporţională cu tensiunea de intrare.

Simbolul sursei de tensiune comandată în tensiune este reprezentată în figura 21, iar ecuaţiile ei constitutive sunt:

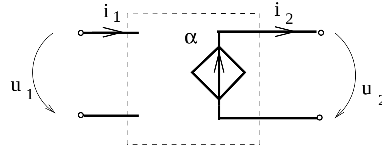


Fig. 3.21.

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ u_2 = \alpha u_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

Parametrul acestui element $\alpha = u_2/u_1$ se numeşte factorul de transfer în tensiune şi are un caracter adimensional.

Sursa de curent controlată în curent (figura 22) este un element diport de circuit, la care poarta de intrare se comportă ca un conductor perfect, iar curentul de ieşire este proporţional cu curentul de intrare.

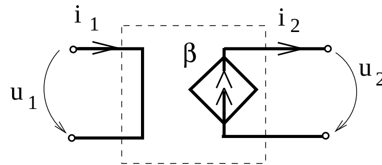


Fig. 3.22.

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ i_2 = \beta i_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Parametrul caracteristic $\beta = i_2/i_1$ se numeşte factorul de transfer în curent şi este adimensional.

Sursa de tensiune controlată în curent (figura 23) este un element diport de circuit la care poarta de intrare se comportă ca un conductor perfect, iar tensiunea de ieşire este proporţională cu curentul de intrare:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = \rho i_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \rho & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

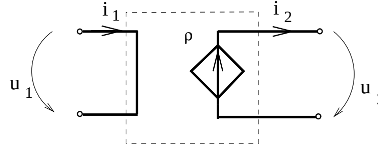


Fig. 3.23.

Parametrul caracteristic $\rho = u_2/u_1$ se măsoară în Ohmi şi se numeşte rezistenţă de transfer.

Sursa de curent controlată în tensiune (figura 24) este un element diport de circuit la care poarta de intrare se comportă ca un izolator perfect, iar curentul de ieşire este proporţional cu tensiunea de intrare.

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = \gamma u_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

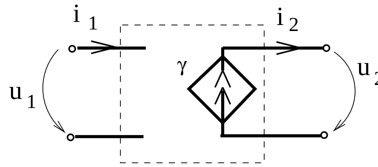


Fig. 3.24.

Parametrul caracteristic $\gamma = i_2/u_1$ se măsoară în Siemens şi se numeşte conductanţă de transfer.

Cele patru tipuri de surse comandate nu au un caracter primitiv. Se poate constata uşor sursele α şi β se pot modera prin înlocuirea surselor ρ şi γ. (figura 25).

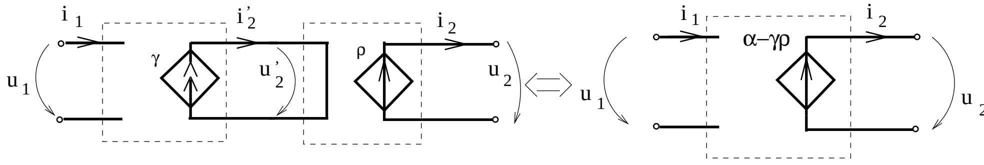


Fig. 3.25.

Sursele comandate sunt surse la care parametrii depind liniar de curenţi sau tensiuni din circuitul din care acestea fac parte. Având un caracter liniar, ele nu pot reprezenta excitaţii ale circuitului, deoarece dacă mărimile de comanda sunt nule atunci şi cele comandate sunt tot nule. Din acest punct de vedere, sursele comandate au o comportare similară rezistoarelor liniare. Totuşi, din punct de vedere energetic aceste elemente au un caracter activ, deoarece puterea transferată pe la borne

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = u_2 i_2, \tag{3.112}$$

poate fi pozitivă sau negativă. O componentă electronică uzuală a cărui funcţionare poate fi modelată cu surse comandate este amplificatorul operaţional. Acesta este un element cuadripol de circuit electric, (figura 26) care admite în prima aproximare o schemă echivalentă cu cea din figura 27.

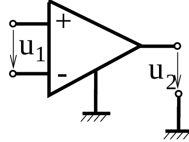


Fig. 3.26.

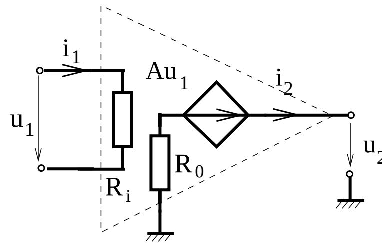


Fig. 3.27.

Poarta de intrare a acestui element se comportă ca un rezistor cu rezistenţa de ordinul sutelor de $k\Omega$, iar tensiunea la poarta de ieşire este $u_2 = Au_1 - R_0 i_2$,

în care constanta A, numită amplificare în buclă deschisă este de ordinul 10^5, iar rezistenţa de ieşire R_0 este de ordinul zecilor de Ohmi. Această comportare poate fi şi ea idealizată, presupunând $R_i \to \infty$ şi $R_o = 0$,

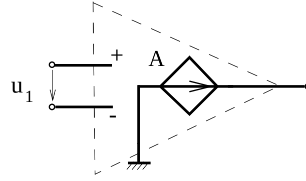


Fig. 3.28.

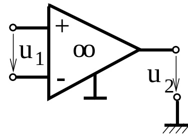


Fig. 3.29.

ceea ce corespunde modelării pentru amplificatorul operaţional printr-o sursă de tensiune comandată în tensiune cu parametrul $\alpha = A$. În unele situaţii se poate presupune că A este ceea ce corespunde modelului perfect al amplificatorului operaţional.

Pentru a obţine o tensiune de ieşire $u_2 = Au_1$ finită, este necesar ca tensiunea de intrare u_1 să fie nulă. Ecuaţiile constitutive ale amplificatorului operaţional perfect sunt:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ i_1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

Şi se constată că nu este nici un parametru caracteristic.

Deoarece la terminalele de intrare tensiunea este sistematic nulă se spune că ele asigură un scurtcircuit virtual. Dar, spre deosebire de scurtcircuitul real curentul este şi el nul $i_1 = 0$.

Datorită ecuaţiilor sale foarte simple şi datorită faptului că idealizează comportarea unui element real, amplificatorul operaţional perfect reprezintă cel mai important element multipolar liniar ideal.

Aplicaţia 1: Amplificatorul inversor

Dintre circuitele electronice cu amplificatoare operaţionale unul dintre cele mai des utilizate este circuitul din figura 20, cunoscut sub numele de amplificator inversor. Pentru a stabili relaţia impusă de acest circuit între tensiunea de intrare u_1 şi cea de ieşire se constată că cele două rezistoare R_1 şi R_2 sunt parcurse de

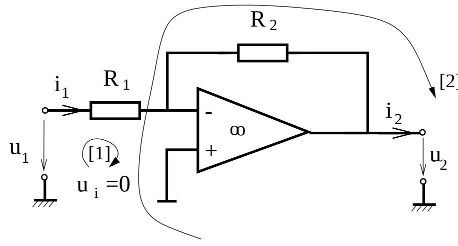


Fig. 3.30.

curenţi egali, deoarece curentul de intrare în amplificatorul operaţional este nul. Aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff şi considerând $u_i = 0$, rezultă:

[1]: $u_1 = R_1 i_1$,

[2]: $u_2 = -R_2 i_1$,

şi în consecinţă:

$$i_1 = \frac{u_1}{R_1},$$

$$u_2 = -\frac{R_2}{R_1} u_1.$$

Se constată că tensiunea de ieşire are semn opus celei de intrare, ceea ce explică numele adoptat pentru acest circuit. Dacă $R_2 > R_1$, atunci acest circuit realizează amplificarea tensiunii de intrare, în caz contrar ele produs o atenuare a ei.

Aplicaţia 2: Amplificatorul neinversor

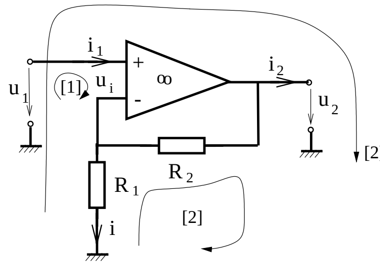


Fig. 3.31.

În acest caz se constată că $i_1 = 0$ şi dacă $u_i = 0$, rezultă:

[1]: $u_1 = R_1 i$.

Şi în acest caz, deoarece curentul de intrare este nul cele două rezistoare vor fi parcurse de acelaşi curent i, iar

[2]: $u_2 = (R_2 + R_1)i$.

În consecinţă:

$$u_2 = \frac{R_2 + R_1}{R_1} u_1 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) u_1.$$

Tensiunea de ieşire are acelaşi semn cu tensiunea de intrare, dar este amplificată. În particular, în cazul în care $R_1 \to \infty$ se obţine circuitul din figura 32, la care:

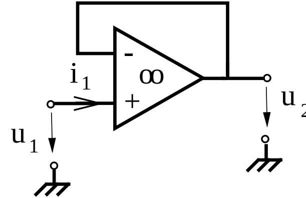


Fig. 3.32.

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ u_2 = u_1, \end{cases}$$

indiferent de valoarea rezistenţei R_2, motiv pentru care acest circuit se numeşte repetor de tensiune.

Se constată că amplificatorul neinversor are ecuaţiile identice cu cele ale sursei de tensiune comandate în tensiune, factorul de transfer în tensiune fiind $\alpha = (1 + R_2/R_1) \geq 1$.

Pentru realizarea unei surse de tensiune comandată în tensiune cu un factor de transfer negativ se poate folosi amplificatorul inversor, precedat de un repetor de tensiune, care asigură izolarea circuitului, respectiv condiţia $i_1 = 0$ (figura 33)

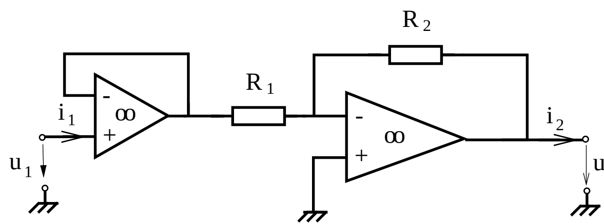


Fig. 3.33.

Aplicaţia 3: Realizarea surselor comandate cu amplificatoare operaţionale. Circuitul din figura 34 are ecuaţiile:

$$u_1 = 0,\ u_2 = -Ri_1,$$

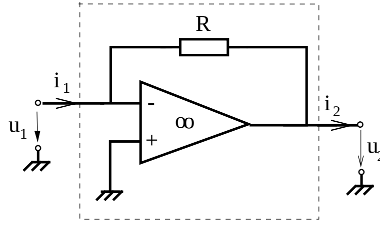


Fig. 3.34.

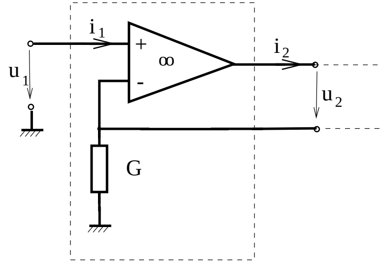


Fig. 3.35.

corespunzatoare sursei de tensiune comandată în curent, la care rezistenţa de transfer $\rho = -R$. Circuitul din figura 35 are ecuaţiile:

$$i_1 = 0,\ i_2 = Gu_1,$$

corespunzatoare unei surse de curent comandate în curent la care conductanţa de transfer $\gamma = G$. Prin conectarea acestor circuite ca în figura 36 se obţine un circuit, la care:

$$u_1 = 0,\ i_2 = RGi_1,$$

deci are o comportare de tipul unei surse de curent comandate în curent, având factorul de transfer $\beta = RG$.

Aplicaţia 4: Circuite de derivare şi integrare.

Prin utilizarea elementelor reactive, cum sunt bobinele şi condensatoarele în locul rezistoarelor folosite în circuitele anterioare se obţin circuite care pot asigura derivarea sau integrarea în timp a tensiunii sau intensităţii curentului de la intrare.

De exemplu, circuitul din figura 37, numit circuit de derivare, va absorbi la intrare curentul:

$$i_1 = C\frac{du_1}{dt},$$

deci va avea tensiunea de ieşire:

$$u_2 = -Ri_1 = -RC\frac{du_1}{dt},$$

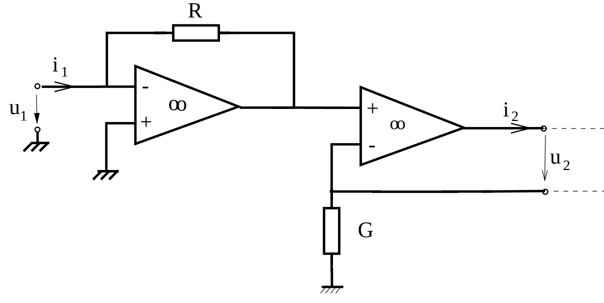


Fig. 3.36.

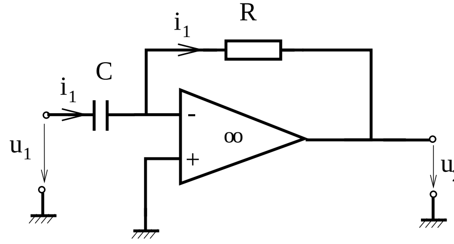


Fig. 3.37.

proporţională cu derivata faţă de timp a tensiunii de intrare. În schimb, în circuitul din figura 38, numit circuit de integrare, are ecuaţiile:

$$i_1 = \frac{u_1}{R},$$

$$u_2 = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_1(t')dt' = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} u_1(t')dt'.$$

Circuitul din figura 39 are tensiunea de ieşire:

$$u_2 = -L\frac{di_1}{dt},$$

proporţională cu derivata curentului de intrare.

Aplicaţia 5: Convertoarele de negativare.

Analizând circuitul din figura 40, rezultă că $i_1 = i_2$ şi $u_1 = Ri$, $u_2 = -Ri$, deci:

$$\begin{cases} i_1 = i_2 \\ u = -u_1, \end{cases}$$

motiv pentru care acest circuit se numeşte convertor pentru negativarea tensiunii (UNIC). Dacă la bornele de ieşire ale acestui circuit se conectează o rezistenţă de sarcină pozitivă $R_s > 0$, se constată că faţă de bornele de intrare, circuitul se comportă ca un element dipolar rezistiv, la care $u_1 = -u_2 = -R_s i_2 = -R_s i_1$, ceea

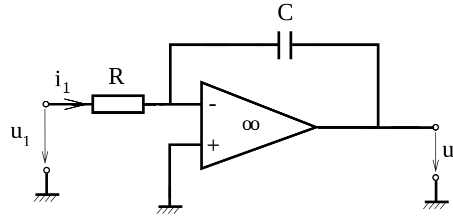


Fig. 3.38.

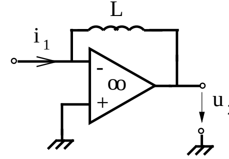


Fig. 3.39.

ce corespunde unei rezistenţe negative. (bornele de intrare (u_1, i_1) sunt asociate după regula de la receptoare !). Dacă la bornele de ieşire ale cuadripolului UNIC se conectează o bobină cu $L_s > 0$ elementul se comportă faţă de bornele de la intrare ca o bobină cu inductivitatea negativă egală cu $-L_s$. Pentru realizarea unui condensator cu capacitate negativă la bornele de ieşire se conectează un condensator cu $C_s > 0$. Circuitul din figura 41, numit convertizor de negativare a curentului (INIC) are ecuaţiile:

$$u_1 = u_2,\ i_1 = -i_2,$$

rezultate din ecuaţiile Kirchhoff scrise pe buclele [1] şi [2].

Şi în acest caz, dacă la bornele de ieşire se conectează un rezistor cu rezistenţa R_s pozitivă, $u_2 = R_s i_2$, rezultă ca faţă de bornele de intrare $u_1 = u_2 = R_s i_2 = -R_s i_1$ circuitul se comportă ca un rezistor cu rezistenţă negativă.

3.13 Bobine ideale cuplate magnetic

Perechea de bobine ideale cuplate magnetic reprezintă un element de circuit cuadripolar diport cu bornele polarizate (figura 42) caracterizat prin relaţiile:

$$u_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt},\ u_2 = L_{21}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt}. \tag{3.113}$$

Acestea sunt valabile în următoarele două condiţii:

– ambele porţi au tensiunea asociată în regula de la receptoare faţă de intensitate;

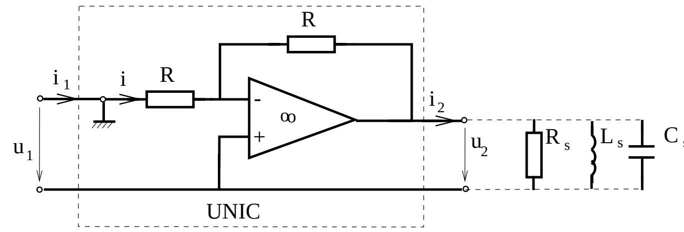


Fig. 3.40.

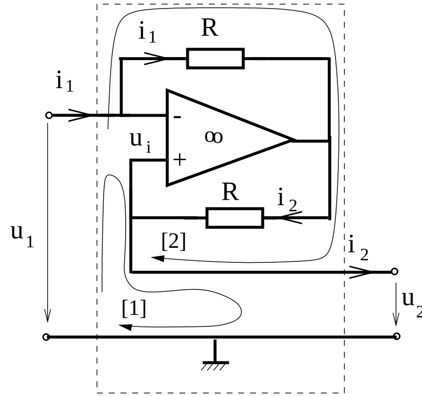


Fig. 3.41.

– ambii curenţi au aceeaşi poziţie faţă de bornele polarizate (ori ambii întră în bobine prin bornele polarizate, ori ambii ies din bobine prin aceste borne).

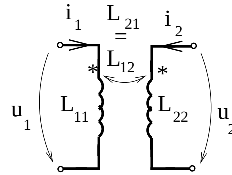


Fig. 3.42.

La schimbarea unui sens de referinţă faţă de aceasta situaţie considerată standard, se modifică semnul mărimii respective din ecuaţie. Perechea de bobine cuplate magnetic este caracterizată de matricea inductivităţilor:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22}, \end{bmatrix}$$

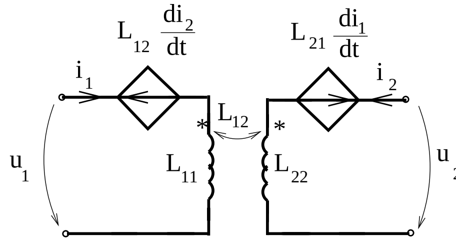


Fig. 3.43.

care se presupune simetrică. Elementele diagonale ale acestei matrice (L_{11}, L_{22}) se numesc inductivităţi proprii, iar cele nediagonale $(L_{12} = L_{21})$ se numesc inductivităţi mutuale. Elementul ideal astfel definit poate fi generalizat, prin considerarea a n bobine cuplate magnetic, care alcătuiesc un circuit multipolar n-port, cu ecuaţiile:

$$u_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt} + ... + L_{1n}\frac{di_n}{dt},$$
$$......$$
$$u_n = L_{n1}\frac{di_1}{dt} + L_{n2}\frac{di_2}{dt} + ... + L_{nn}\frac{di_n}{dt},$$

în condiţiile standard evidenţiate anterior. Folosind notaţia matriceală:

$$i = [i_1, i_2, ...i_n]^T, \;\; u = [u_1, u_2, ...u_n]^T, \tag{3.114}$$

rezultă ecuaţiile constitutive:

$$u = L\frac{di}{dt}, \tag{3.115}$$

în care $L = [L_{ij}]$ este o matrice pătrată şi simetrică, independentă de starea electrică a sistemului de bobine. La bobinele cuplate se constată că tensiunea la bornele unei bobine conţine în afara unui termen proporţional cu derivata curentului din propria bobina şi alţi termeni proporţionali cu vitezele de variaţie ale curenţilor din bobinele cu care acestea este cuplată, termeni numiţi tensiuni induse prin cuplaj. Folosând surse de tensiune comandate în derivata curentului, perechea de bobine cuplate admite schema echivalentă din figura 43.

Este evident că bobinele necuplate sunt cazuri particulare ale bobinelor cuplate, la care inductivităţile mutuale sunt nule ($L_{ij} = 0$, pentru $i \neq j$).

Pentru a caracteriza comportarea energetică a unui sistem de bobine se calculează puterea transferată pe la borne:

$$p = \sum_{k=1}^{n} u_k i_k = \sum_{k=1}^{n} i_k \sum_{j=1}^{n} L_{kj}\frac{di_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L_{kj} i_k \frac{di_j}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}L_{kj} i_k i_j.$$

Se constată că energia unui sistem de bobine este:

$$w = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L_{kj} i_k i_j = \frac{1}{2} i^T L i.$$

În particular, în cazul unei perechi de bobine se obţine:

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = i_1 (L_1 1 \frac{di_1}{dt} + L_1 2 \frac{di_2}{dt}) + i_2 (L_2 1 \frac{di_1}{dt} + L_2 2 \frac{di_2}{dt}) =$$
$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{L_{11} i_1^2}{2} + \frac{L_{22} i_2^2}{2} + L_{12} i_1 i_2\right] = \frac{dw}{dt},$$

deci:

$$w = \frac{L_{11} i_1^2}{2} + \frac{L_{22} i_2^2}{2} + L_{12} i_1 i_2.$$

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca această energie să fie nenegativă pentru orice valori ale curenţilor este ca matricea inductivităţilor să fie pozitiv definită. Această condiţie este îndeplintă pentru toate bobinele reale, la care inductivităţile proprii sunt pozitive $L_{11} > 0, L_{22} > 0$, iar determinantul matricei L este pozitiv, respectiv $L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21}$.

În consecinţă inductivitatea mutuală $M = L_{12} = L_{21}$, satisface inegalitatea

$$M^2 < L_{12} L_{21}.$$

La limită, valoarea maximă a inductivităţii poate fi cel mult media geometrică a inductivităţilor proprii, $M = \sqrt{L_{11} L_{22}}$, în acest caz se spune că bobinele sunt cuplate perfect.

3.14 Elemente multipolare neliniare

Un element neliniar rezistiv cu n borne este caracterizat prin $n-1$ funcţii caracteristice de tot atâtea variabile reale. De exemplu, aceste funcţii pot exprima intensităţile curenţilor în functie de potenţiale:

$$\begin{aligned}
&i_1 = g_1(V_1, V_2, \ldots, V_{n-1});\\
&i_2 = g_2(V_1, V_2, \ldots, V_{n-1});\\
&\ldots\\
&i_{n-1} = g_{n-1}(V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}).
\end{aligned}$$

urmând ca i_n să fie suma acestor curenţi luată cu semn schimbat iar $V_n = 0$. Dacă bornele se cuplează în perechi, numite porţi, la care $i' = i''$, atunci caracterizarea elementului multiport este posibilă folosind $m = n/2$ funcţii reale. Acestea pot exprima, de exemplu, curenţii din porţi în funcţie de tensiunile la bornele porţilor:

$$\begin{aligned}
&i_1 = g_1(u_1, u_2, \ldots, u_n);\\
&i_2 = g_2(u_1, u_2, \ldots, u_n);\\
&\ldots\\
&i_n = g_{n-1}(u_1, u_2, \ldots, u_n).
\end{aligned}$$

În particular, în cazul cuadripolilor, dacă:

$$i_1 = g_1(u_1, u_2),$$

$$i_2 = g_2(u_1, u_2).$$

se spune că elementul este diport controlat în tensiune.

Dacă elementul este controlat în curent, el va fi caracterizat prin ecuaţiile:

$$u_1 = f_1(i_1, i_2),$$

$$u_2 = f_2(i_1, i_2).$$

În afara acestor două moduri de caracterizare se mai pot concepe încă alte patru distincte, după cum mărimile de control sunt (i_1, u_1), (i_2, u_2), (i_1, u_2) şi respectiv (i_2, u_1), numite moduri hibride.

Pentru modelarea elementelor multipolare neliniare sunt utile sursele comandate neliniar, care sunt elemente ideale de tip cuadripol diport, ce generalizează comportarea surselor comandate liniar.

Sursa de tensiune comandată neliniar în tensiune are ecuaţiile constitutive:

$$i_1 = 0,\ u_2 = f(u_1).$$

Sursa de curent comandată neliniar în curent are ecuaţiile constitutive:

$$u_1 = 0,\ i_2 = g(i_1).$$

Sursa de tensiune comandată neliniar în curent are ecuaţiile constitutive:

$$u_1 = 0,\ u_2 = e(i_1).$$

Sursa de curent comandată neliniar în tensiune are ecuaţiile constitutive:

$$i_1 = 0,\ i_2 = h(u_1).$$

Se constată că fiecare din aceste patru elemente ideale este caracterizat de câte o funcţie caracteristică, $f, g, e, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aceste elemente ideale nu sunt elemente primitive deoarece ele pot fi modelate prin surse comandate liniar şi rezistoare neliniare, după cum rezultă din exemplul dat în figura 44.

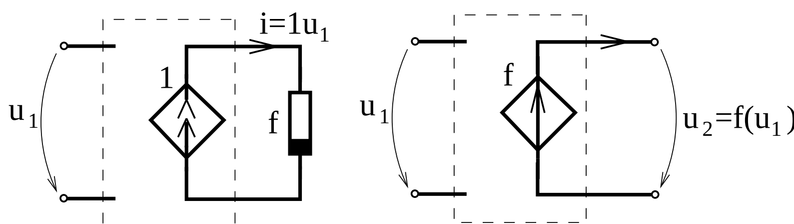


Fig. 3.44.

Un element ideal util în modelarea circuitelor electronice ideale îl reprezintă modelul neliniar al amplificatorului operaţional.

Modelul liniar al amplificatorului liniar, prezentat anterior, are dezavantajul că tensiunea de ieşire poate lua valori oricât de mari, ceea ce nu corespunde realităţii.

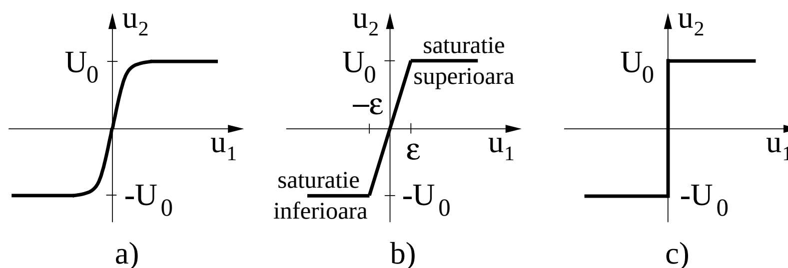


Fig. 3.45.

Dependenţa tensiunii de ieşire u_2 în funcţie de cea de intrare u_1 are în cazul amplificatoarelor reale o comportare de tipul celei reprezentate în figura 45.a. Aceasta poate fi aproximată liniar pe porţiuni (fig. 45.b) prin funcţia:

$$u_2 = \begin{cases} u_0, & u_0 < -\varepsilon \\ Au_1, & -\varepsilon < u_1 < \varepsilon \\ u_0, & u_1 > \varepsilon \end{cases}$$

în care $\varepsilon = A/u_0$. Se constată că tensiunea de ieşire în acest model este limitată $|u_2| \leq u_0$, modelul liniar al amplificatorului liniar fiind acceptabil doar pentru tensiunii suficient de mici aplicate la intrare $|u_2| \leq \varepsilon$. Dacă se consideră că amplificarea în buclă deschisă este nemărginită $A \to \infty$ şi implicit $\varepsilon \to \infty$ se obţine modelul ideal al amplificatorului operaţional cu limitare. Acest element ideal este o sursă de tensiune comandată neliniar în tensiune, cu ecuaţia caracteristică $u_2 = U_0 \cdot sgn(u_1)$.

Aplicaţia 1: Circuitul comparator.

Un exemplu tipic de circuit în care modelul perfect al amplificatorului operaţional nu poate fi utilizat este circuitul comparator (fig. 46).

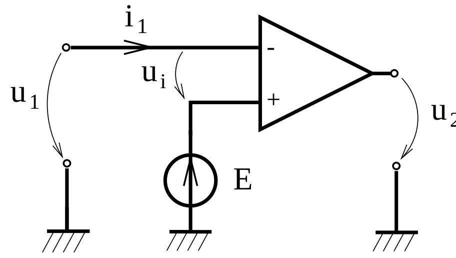


Fig. 3.46.

Se va presupune că $E < U_0$. Aplicând la intrare o tensiune $u_1 = u_1(t)$, se constată ca tensiunea $u_i = u_1(t) - E \neq 0$, şi în consecinţă amplificatorul se saturează superior sau inferior, în funcţie de semnul mărimii $u_1 - E$. Tensiunea de ieşire $u_2 = U_0 \cdot \mathrm{sgn}(u_1(t) - E)$ este pozitivă şi egală cu U_0, dacă $u_1(t) > E$ şi este negativă şi egală cu $-U_0$, dacă $u_1(t) < E$.

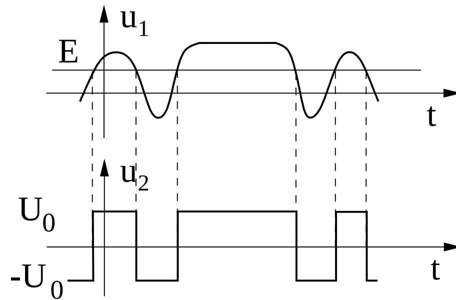


Fig. 3.47.

Se realizează în acest fel compararea între $u_0(t)$ şi E. Dacă $u_1 < 0$, atunci amplificatorul operaţional se saturează superior iar dacă $u_1 < E$, atunci amplificatorul operaţional se saturează inferior.

Folosind acest circuit se detectează situaţiile în care tensiunea de intrare $u_1(t)$ depăşeşte un anumit prag E (fig. 47).

Aplicaţia 2: Reacţia negativă şi pozitivă.

Exceptând cazul comparatorului, în toate circuitele cu amplificatoare operaţionale prezentate anterior, se constată că borna de ieşire este conectată cu intrarea inversoare printr-un element dipolar de circuit. Această situaţie este cunoscută sub numele de reacţie negativă. Reacţia negativă face posibilă funcţionarea amplificatorului în zona liniară, pentru o gamă largă de tensiuni de intrare, şi permite adoptarea modelului perfect pentru amplificatorul operaţional. Utilizarea modelului liniar perfect al amplificatorului operaţional nu este permisă în cazul reacţiei pozitive, deoarece în acest caz tensiunea de intrare u_i nu mai este obligatoriu nulă, circuitul evoluând către starea de saturaţie, ceea ce impune folosirea modelului cu limitare.

De exemplu, circuitul din figura 48 este un circuit cu reacţie pozitivă.

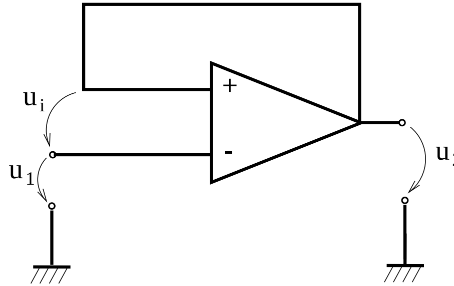


Fig. 3.48.

Dacă de presupune că amplificatorul operaţional se află în starea de saturaţie superioară $u_2 = U_0$, el va rămâne în această stare cât timp $u_i = u_2 - u_1 = U_0 - u_1 > 0$, deci dacă $u_1(t) < U_0$ (fig. CEVA).

Dacă $u_1 > U_0$, atunci amplificatorul basculează în starea de saturaţie inferioară şi tensiunea de ieşire devine $u_2(t) = -U_0$. El se va menţine în această stare atât timp cât $u_i = u_2 - u_1 = -U_0 - u_1 < 0$, deci pentru $u_1 > -U_0$.

Se constată că în planul $u_1 - u_2$, caracteristica acestui circuit prezintă fenomenul de histerezis (fig. 49).

Aplicaţia 3: Convertoarele de negativare în regiunea de saturaţie.

Convetoarele de negativare UNIC şi INIC, realizate cu amplificatoare operaţionale, satisfac relaţiile $u_2 = -u_1$, $i_2 = i_1$ şi respectiv $u_2 = u_1$, $i_2 = -i_1$ pentru valori ale tensiunii de intrare $|u_1| < U_0$. Deoarece tensiunea de ieşire nu poate depăşi în modul valoarea U_0, rezultă că dacă $|u_1| > U_0$, amplificatoarele operaţionale se saturează şi $u_2 = \pm U_0$.

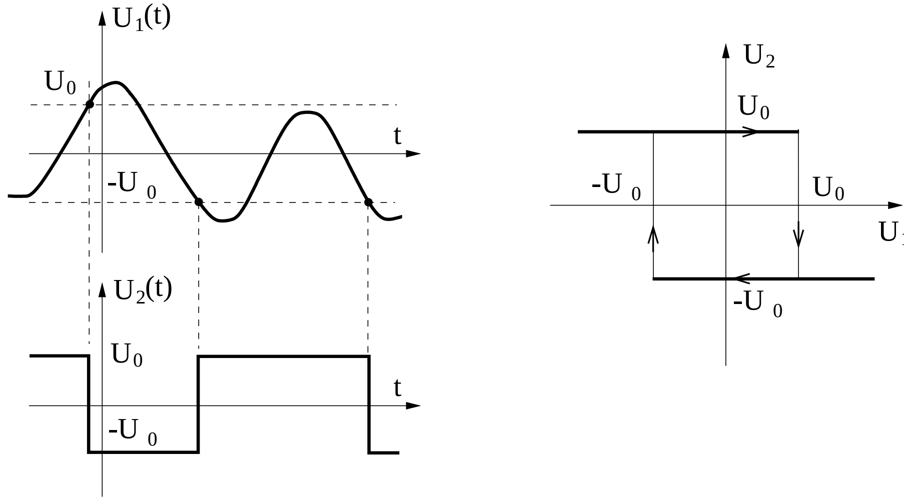


Fig. 3.49.

De exemplu, circuitul INIC cu sarcină rezistivă (fig. 50.a) aflat în saturaţie superioară admite schema echivalentă din figura 50.b, (cu $u_2 = U_0$), cât timp

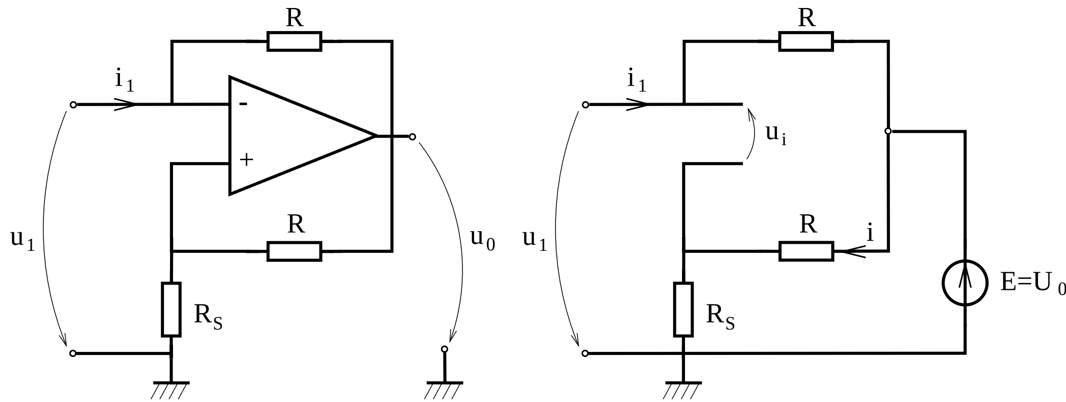


Fig. 3.50.

$u_i = R_s i - u_1 > 0$, ceea ce corespunde condiţiei $u_1 < R_s i = R_s U_0/(R + R_s)$. În acesta stare $u_1 = Ri_1 + E = Ri_1 + U_0$. Dacă amplificatorul operaţional este saturat inferior, tensiunea de ieşire este $u_0 = -U_0$ (fig. CEVA) şi va ramâne în această stare cât timp $u_i = R_s i - u_1 < 0$, ceea ce corespunde condiţiei $u_1 > R_s i' = -R_s U_0/(R + R_s)$. În acestă stare $u_1 = Ri_1 + E' = Ri_1 U_0$.

În regiunea liniară, amplificatorul operaţional asigură o relaţie $u_1 = -R_s i_1$, valabilă pentru $|u_0| < U_0$, deci pentru $|(R + R_s)i_1| < U_0$ respectiv $|u_1|(R + R_s)/R_s < U_0$.

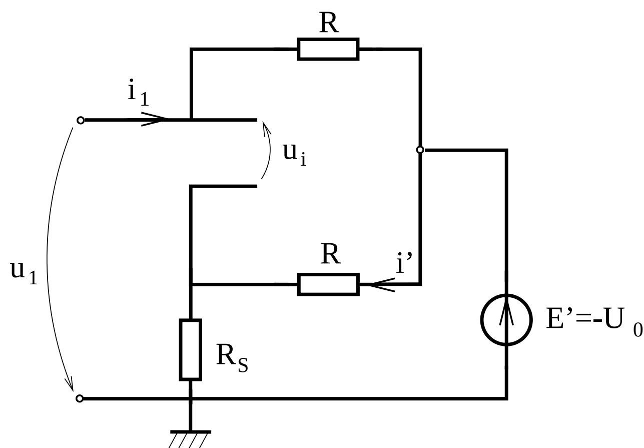


Fig. 3.51.

În consecinţă caracteristica tensiune-curent corespunzătoare bornelor de intrare are graficul din figura 52.

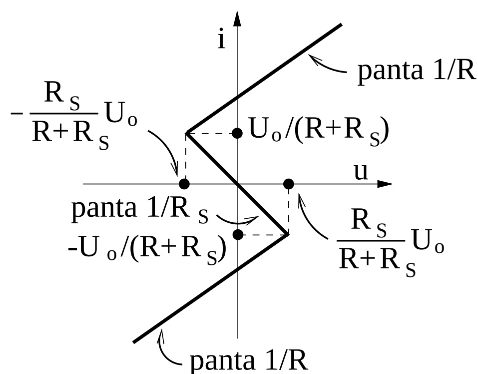


Fig. 3.52.

Faţă de aceste borne circuitul se comportă ca un rezistor neliniar controlat în curent, care are o zonă cu conductaţă dinamică negativă $G = -1/R_s$.

3.15 Modelarea elementelor reale liniare de circuit

Elementele reale de circuit electric sunt concepute şi realizate în vederea îndeplinirii anumitor funcţii. Acestea funcţionează în mod normal într-un domeniu limitat de tensiuni, intensităţi, puteri sau frecvenţe. Depăşirea acestor domenii

determină distrugerea componentei sau are loc o modificare sensibilă a comportării lor. De obicei, depăşirea unui curent limită, specific componentei, determină fenomene ireversibile de avalanşe, depăşirea unei tensiuni limită determină apariţia fenomenului de străpungere, care este însoţit de modificări fizico-chimice ireversibile, depăşirea puterii limită determină apariţia solicitărilor termice care pot duce la distrugere termică a componentei iar depăşirea frecvenţei limită determină apariţia unor efecte de pierderi suplimentare (prin efect pelicular sau curenţi turbionari) sau a unor efecte de propagare, care fac ca elementul real să se comporte cu totul diferit. Aceste fenomene nu pot avea loc în cazul elementelor ideale, definite prin ecuaţiile constitutive, la care $i \in R$, $u \in R$.

În consecintă modelarea elementelor reale prin elemente ideale nu poate fi făcută cu rezultate satisfăcătoare decât într-un domeniu limitat.

Este evident că pentru a studia comportarea unei componente în regimurile anormale de funcţionare, modelarea nu poate fi limitată doar la domeniul normal de funcţionare.

De exemplu, spre deosebire de rezistoarele ideale, cele reale satisfac relaţia $u = Ri$, doar pentru valori limitate ale intensităţii curentului electric ($i \leq i_{max}$), la depăşirea căreia puterea disipată ($P > P_{max} = Ri^2_{max}$) determină distrugerea termică a componentei. La frecvenţă suficient de mare fenomenul de inducţie electromagnetică devine important în funcţionarea componentei, astfel încât aceasta trebuie modelată ca în figura 53.a cu o schemă echivalentă conţinând pe lângă rezistorul ideal şi o bobină (cu o inductivitate neglijabilă numită parazită).

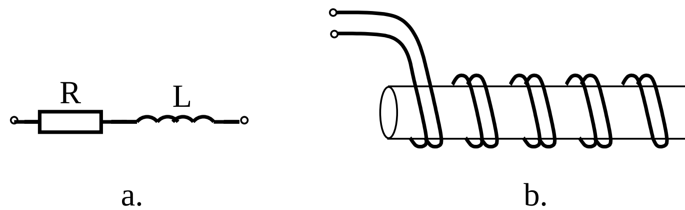


Fig. 3.53.

Pentru a micşora inductivitatea parazită şi a extinde domeniul de frecvenţă admisibil se iau măsuri speciale în construirea rezistoarelor. De exemplu, rezistoarele antiinductive sunt construite dintr-un fir dublu (fig. 53.b) astfel încât aria suprafeţei definite de curba conductorului să fie mai mică. Prin această metodă inductivitatea parazită se micşorează sensibil, dar nu este eliminată complet. Considerând un tronson de lungime Δx din perechea de fire se constată că acesta

prezintă în afara rezistenţei ΔR şi o inductivitate ΔL precum şi o capacitate ΔC între cele două fire. Cu cât tronsonul de condutoare este mai mare, cu atât comportarea acestui model se apropie mai mult de comportarea componentei reale. La frecvenţe mici se poate adopta un singur tronson, dar la frecvenţe foarte mari trebuie sa se considere că $\Delta x \to 0$, ceea ce permite modelarea undelor ce se

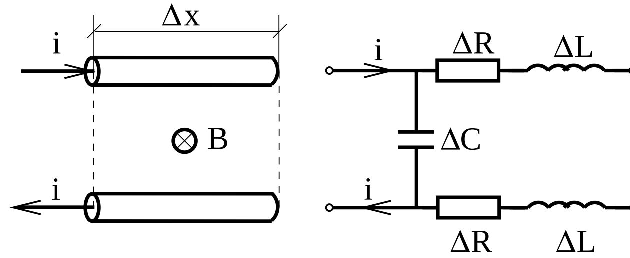


Fig. 3.54.

propagă de firul dublu. În acest caz limită, modelul conţine elemente de circuit cu parametri distribuiţi, spre deosebire de cazul $\Delta x \neq 0$, în care modelul rezistorului ideal este construit cu elemente având parametri concentraţi.

Bobinele reale prezintă pe lângă inductivitatea proprie L şi o rezistenţă a firului care nu poate fi neglijată. Rezultă că acestea se pot modela la frecvenţe mici prin schema din figura CEVA.

La frecvenţe mari efectele peliculare din conductorul bobinei fac necesară adoptarea unei scheme mai complicate de tipul celei din figura 55.a.

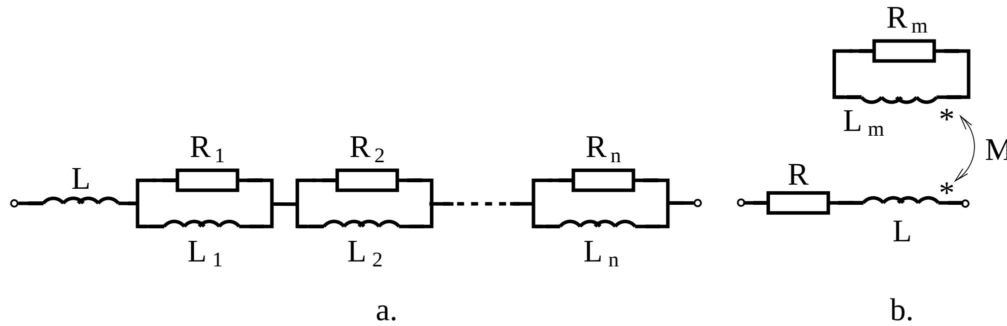


Fig. 3.55.

Dacă bobina are miez magnetic, atunci curenţii turbionari induşi în acest miez pot influenţa comportarea bobinei. O schemă simplă ce ia în consideraţie acest efect este cea din figura 55.b, în care în afara rezistenţei conductorului R şi inductivitatea proprie L, mai intervin, inductivitatea mizului L_m, rezistenţa electrică a miezului R_m şi inductivitatea de cuplaj M, între miez şi înfăşurarea bobinei.

La frecvenţe înalte trebuie luat şi efectul capacitiv care apare între spirele bobinei (fig. 56).

De altfel, între conductoarele terminale ale oricărei componente există o capacitate parazită care poate avea un rol important la frecvenţe foarte înalte. De asemenea aceste conductoare terminale au şi o inductivitate proprie parazită.

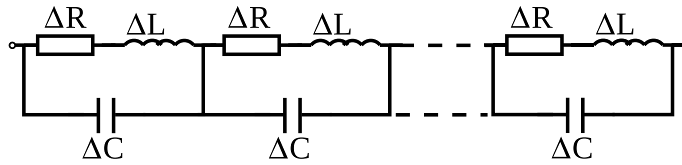


Fig. 3.56.

Condesatorul ideal este componenta a cărei comportare se apropie cel mai mult de omologul său ideal. Totuşi şi în acest caz, dielectricul nu este un izolator perfect, existând un curent de pierderi şi implicit o rezistenă de izolaţie, care nu este infinită. La frecvenţe foate înalte se face simţită şi inductivitatea parazită a componentei (fig. 57).

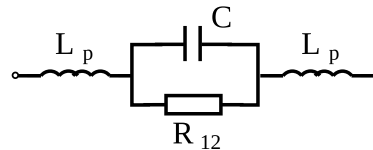


Fig. 3.57.

Generatoarele reale admit modele mai simple sau mai complicate, în funcţie de principiul lor constructiv, care poate fi electrochimic, electronic, electromecanic etc. În orice caz, aceste modele vor conţine cel puţin o sursă ideală de tensiune sau curent. Cel mai simplu model este cel al generatorului real de tensiune (E, R) sau de curent (J, G).

Adoptarea unui model ideal pentru generatorul real, respectiv neglijarea rezistenţei interne $R = 0$ sau a conductant'ei interne $G = 0$ trebuie făcută cu maximă precauţie, prin compensarea acestor parametri cu cei ai circuitului din care face parte. De exemplu, pentru a studia regimul de scurtcircuit al unui generator real trebuie luată în considerare rezistenţa sa, oricât de mică este aceasta, altfel se obţin contradicţii de tipul $0 = U = E \neq 0$. Iar în studiul regimului de mers în gol al unui generator real trebuie luată în considerare conductanţa sa internă oricât de mică ar fi aceasta, deoarece generatorul ideal de curent nu poate funcţiona în gol.

Studiul generatoarelor reale în regim variabil impune caracterizarea lor nu numai prin rezistenţa internă ci şi prin inductivitatea lor internă sau chiar printr-un model mai complicat.

Elementele multipolare liniare sunt caracterizate prin relaţiile liniare impuse de acestea între potenţialele bornelor şi curenţii prin borne. Aceste aplicaţii liniare pot fi reprezentate prin matrice pătrate ale căror dimensiuni depind de numărul de borne ale elementului.

Considerând cazul cel mai simplu, al elementului tripolar de circuit, la care $n = 3$, starea sa electrică va putea fi caracterizată univoc de doi curenţi i_1, i_2 şi două potenţiale V_1, V_2 (fig. 58.a).

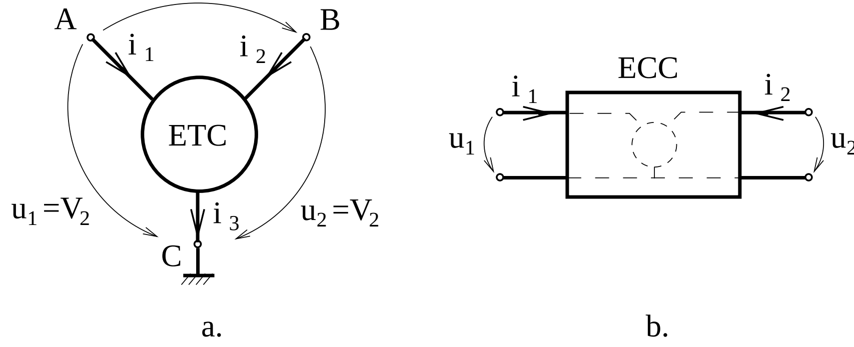


Fig. 3.58.

Conform teoremelor lui Kirchhoff, curentul $i_3 = -(i_1 + i_2)$, iar tensiunile $u_1 = u_{AC} = V_1$, $u_2 = u_{BC} = V_2$ şi $u_{AB} = V_1 - V_2$. Considerând borna C, comună atât intrării cât şi ieşirii, elementul tripolar de circuit poate fi privit ca un element cuadripol diport, caracterizat de mărimile u_1, u_2, i_1, i_2 (fig. 58.b).

Se deosebesc şase moduri distincte pentru a caracteriza şi descrie un astfel de element:

	variabile independente	variabile dependente
controlat în tensiune	i_1, i_2	u_1, u_2
controlat în curent	u_1, u_2	i_1, i_2
modul hibrid 1	i_1, u_2	i_2, u_1
modul hibrid 2	u_1, i_2	i_1, u_2
modul transmisie	u_2, i_2	u_1, i_1
modul transmisie	u_1, i_1	u_2, i_2

Relaţiile caracteristice pot avea şase forme distincte:

– controlat în curent:

$$\begin{cases} u_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2 \\ u_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2 \end{cases} \qquad \overset{u}{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}} = \overset{R}{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}} \overset{i}{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}}$$

elementul este caracterizat de matricea rezistenţelor R;

– controlat în tensiune:

$$\begin{cases} i_1 = g_{11}u_1 + g_{12}u_2 \\ i_2 = g_{21}u_1 + g_{22}u_2 \end{cases} \qquad \overset{i}{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}} = \overset{G}{\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}} \overset{u}{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}$$

elementul fiind caracterizat de matricea conductanţelor G, care dacă este ireversibilă satisface relaţia $R = G^{-1}$;

– modul hibrid 1:

$$\begin{cases} u_1 = h_{11} i_1 + h_{12} u_2 \\ i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} u_2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \overset{H}{\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

în care elementul este caracterizat prin matricea hibiridă H;

– modul hibrid 2:

$$\begin{cases} i_1 = h'_{11} u_1 + h'_{12} i_2 \\ u_2 = h'_{21} u_1 + h'_{22} i_2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \overset{H'}{\begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

în care elementul este caracterizat prin matricea hibridă inversă H', care daca este inversabilă satisface relaţia $H' = H^{-1}$;

– modul transmisie 1:

$$\begin{cases} u_1 = t_{11} u_2 - t_{12} i_2 \\ i_1 = t_{21} u_2 - t_{22} i_2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \overset{T}{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

în care elementul este caracterizat prin matricea de transmisie T (din considerente istorice această matrice este definită asociând sensurile mărimilor de ieşire u_2, i_2 după regula de la generatoare, ceea ce a impus utilizarea semnului minus pentru i_2 în ecuaţiile anterioare);

– modul transmisie 2:

$$\begin{cases} u_2 = t'_{11} u_1 + t'_{12} i_2 \\ -i_2 = t'_{21} u_1 + t'_{22} i_2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \overset{T'}{\begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

în care elementul este caracterizat prin matricea de transmisie inversă T', care dacă este inversabilă satisface egalitatea $T' = T^{-1}$.

Se constată că în fiecare mod de reprezentare elementul este caracterizat prin patru parametrii reali. În unele situaţii, această matrice este simetrică, iar numărul parametrilor se reduce la trei. Elementele la care matricea R sau G este simetrică se numesc elemente reciproce. În mod normal, cunoaşterea matricei caracteristice unui anumit mod de reprezentare permite determinarea celorlalte cinci matrice caracteristice, prin rezolvarea sistemului de două ecuaţii liniare (singura condiţie fiind ca deteminantul acestui sistem să fie nenul).

Matricea rezistenţelor are toate elementele de dimensiunea unor rezistenţe. Se constată că:

$$r_{11} = \left.\frac{u_1}{i_1}\right|_{i_2=0},$$

reprezintă rezistenţa porţii de intrare în condiţiile în care poarta de ieşire este în gol (fig. 59.a),

$$r_{12} = \left.\frac{u_1}{i_2}\right|_{i_1=0},$$

reprezintă rezistenţa de transfer intrare-ieşire, în condiţiile în care poarta de intrare este în gol (fig. 59.b),

$$r_{21} = \left.\frac{u_2}{i_1}\right|_{i_2=0},$$

reprezintă rezistenţa de transfer ieşire-intrare, în condiţiile în care poarta de ieşire este în gol (fig. 59.c), iar

$$r_{22} = \left.\frac{u_2}{i_2}\right|_{i_1=0},$$

este rezistenţa porţii de ieşire în condiţiile în care poarta de intrare este în gol (fig. 59.d).

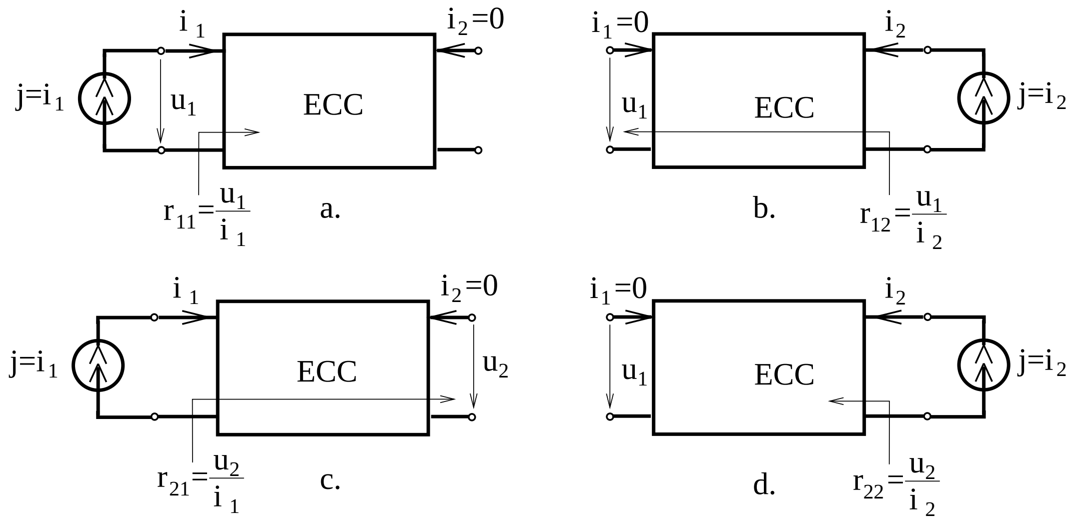


Fig. 3.59.

În mod asemănător poate fi interpretat oricare din ceilalţi parametri caracteristici. Se constată că toate elementele matricei G au dimensiunea unor conductanţe:

$$g_{11} = \left.\frac{i_1}{u_1}\right|_{u_2=0},\; g_{12} = \left.\frac{i_1}{u_2}\right|_{u_1=0},\; g_{21} = \left.\frac{i_2}{u_1}\right|_{u_2=0},\; g_{22} = \left.\frac{i_2}{u_2}\right|_{u_1=0},$$

definite prin excitarea elementului dipolar cu o sursă ideală de tensiune conectată la o poartă, în condiţiile în care cealaltă poartă are bornele scurtcircuitate (fig. 60).

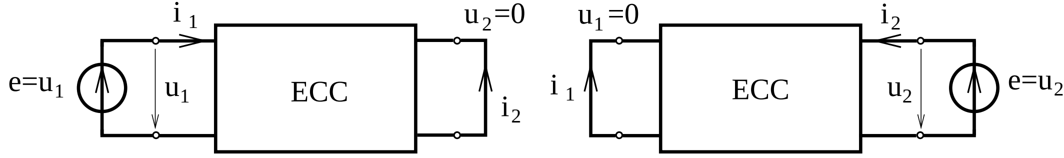


Fig. 3.60.

În modul hibrid de caracterizare, elementele matricei H are unităţi de măsură diferite:

$h_{11} = \frac{u_1}{i_1}\Big|_{u_2=0}$ –rezistenţa de intrare (cu ieşirea în scurtcircuit);

$h_{22} = \frac{i_2}{u_2}\Big|_{i_1=0}$ –conductanţa de ieîre (cu intrarea în gol);

$h_{12} = \frac{u_1}{u_2}\Big|_{i_1=0}$ –factorul adimensional de transfer al tensiunii;

$h_{21} = \frac{i_2}{i_1}\Big|_{u_2=0}$ –factorul adimensional de transfer al curentului.

În acest caz poarta de intrare se excită în curent iar cea de ieşire în tensiune.
Matricele de transmisie au elementele diagonale adimensionale:

$$t_{11} = \frac{u_1}{u_2}\Big|_{i_2=0},\ t_{22} = \frac{-i_1}{i_2}\Big|_{u_2=0},$$

cu semnificaţia unor factori de transfer în tensiune sau curent, iar cele nediagonale sunt rezistenţe sau conductanţe de transfer:

$$t_{12} = -\frac{u_1}{i_2}\Big|_{u_2=0},\ t_{21} = \frac{i_1}{u_2}\Big|_{i_2=0},$$

excitaţia realizându-se în acest caz exclusiv la poarta de intrare, cea de ieşire fiind succesiv în gol respectiv în scurtcircuit.

Analizând ecuaţiile constitutive ale surselor comandate liniar se constată că:

– sursa de tensiune comandată în tensiune are ecuaţia de tip hibrid 2;

– sursa de curent comandată în curent are ecuaţia de tip hibird 1;

– sursa de tensiune comandată în curent are ecuaţia corespunzătoare modului controlat în curent;

– sursa de curent comandată în tensiune are ecuaţia corespunzătoare modului controlat în tensiune.

Deoarece determinantul matricelor acestor elemente este nul, rezultă că aceste moduri sunt specifice fiecărui element considerat.

Sursele comandate liniar pot fi folosite în modelarea oricărui element rezistiv liniar. Dacă acesta este controlat în curent, tensiunea de intrare este:

$$u_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2 = u_1' + u_1''.$$

Primul termen $u_1' = r_{11}i_1$ corespunde unui rezistor cu rezistenţa r_{11} iar al doilea termen $u_1'' = r_{12}i_2$ corespunde unui surse de tensiune comandate liniar în curentul de ieşire, având rezistenţa de transfer r_{12}. În mod asemănător se obţine schema echivalentă corespunzătoare porţii de ieşire (fig. 61.a).

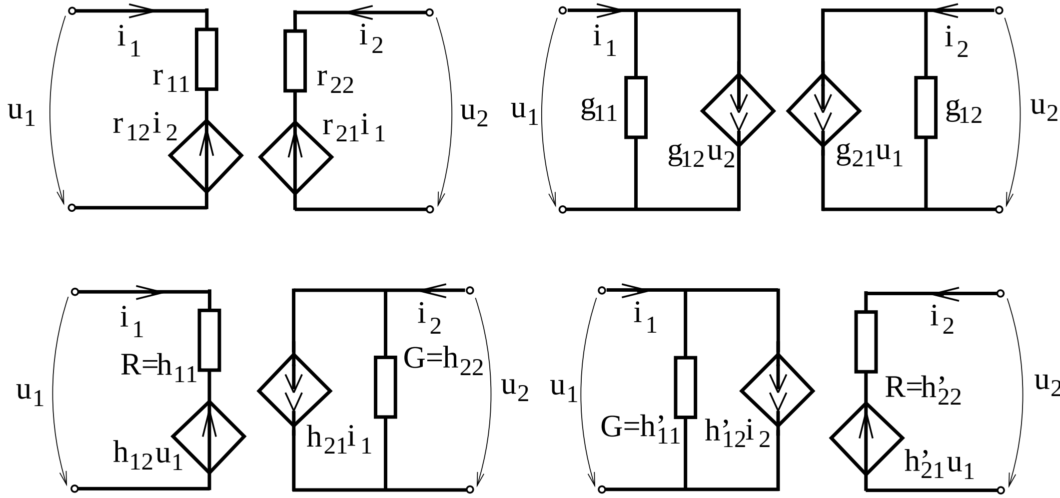


Fig. 3.61.

Elementele cuadripol de circuit controlate în tensiune admit circuite echivalente cu surse comandate ca cele din figura CEVA iar circuitele echivalente modului hibird 1 şi 2 sunt reprezentate în figura CEVA.

Circuitele cuadripolare rezistive liniare reciproce sunt caracterizate doar prin trei parametri şi admit scheme echivalente mai simple decât cele din figura CEVA. Se va demonstra că aceste elemente admit scheme echivalente cu trei rezistoare dipolare conectate în Π (fig. 62.a) sau în T (fig. 62.b).

Considerând spre exemplu schema echivalentă în T pentru cazul cuadripolului controlat în curent rezultă:

$$r_{11} = \frac{u_1}{i_1}\bigg|_{i_2=0} = R_1 + R_3,$$

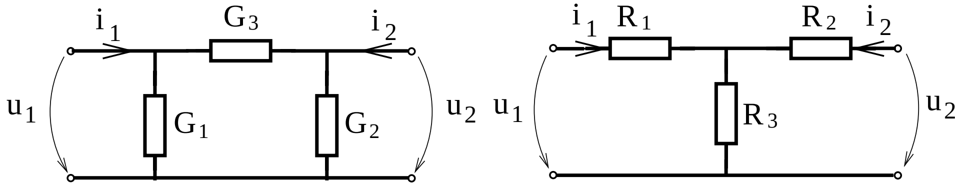


Fig. 3.62.

$$r_{12} = \left.\frac{u_1}{i_2}\right|_{i_1=0} = R_3 = \left.\frac{u_2}{i_1}\right|_{i_2=0} = r_{21},$$

$$r_{22} = \left.\frac{u_2}{i_2}\right|_{i_1=0} = R_2 + R_3,$$

şi matricea rezistenţelor de forma:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}.$$

Valorile rezistenţelor se determină cu relaţiile $R_3 = r_{12} = r_{21}$, $R_1 = r_{11} - r_{12}$, $R_2 = r_{22} - r_{12}$.

Folosind modul de control în tensiune, rezultă pentru cazul cuadripolului în Π matricea conductanţelor:

$$G \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & G_3 \\ G_3 & G_2 + G_2 \end{bmatrix}.$$

Deoarece $R = G^{-1}$, rezultă că (G_1, G_2, G_3) se pot exprima funcţie de (R_1, R_2, R_3).

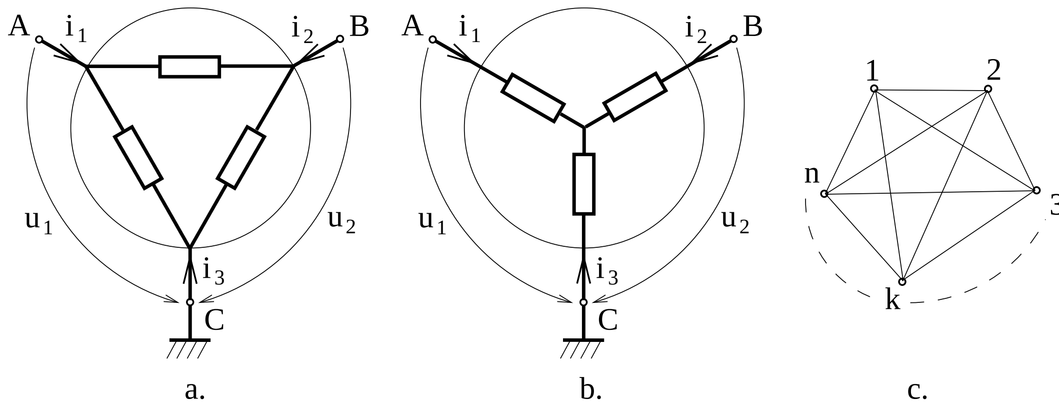


Fig. 3.63.

În consecinţă un element rezistiv tripolar liniar şi reciproc admite una din schemele echivalente în triunghi (fig. 63.a) sau în stea (fig. 63.b). Acest rezultat poate fi generalizat la cazul unui element multipolar cu n borne care admite o schemă echivalentă de tip poligon complet cu $(n-1)+(n-2)+\ldots+1 = n(n-1)/2$ laturi continând rezistoare liniare (fig. 63.c), matricea conductanţelor G având dimensiunea $(n-1)$x$(n-1)$ iar curenţii $i = [i_1, \ldots, i_{n-1}]^T$ exprimându-se printr-o transformare liniară $i = GV$ în funcţie de vectorului potenţialelor $V = [V_1, \ldots, V_{n-1}]^T$.

În regim variabil elementele rezistive nu îşi modifică modul de comportare, ecuaţiile constitutive fiind de tip algebric îşi menţin forma. Elementele multipolare reale prezintă efecte inductive şi capacitive care la frecvenţe înalte pot deveni importante. Dacă se iau în considerare doar inductivităţile parazite ale terminalelor şi capacităţile între acestea se poate adopta un model de forma celui din figura 64.

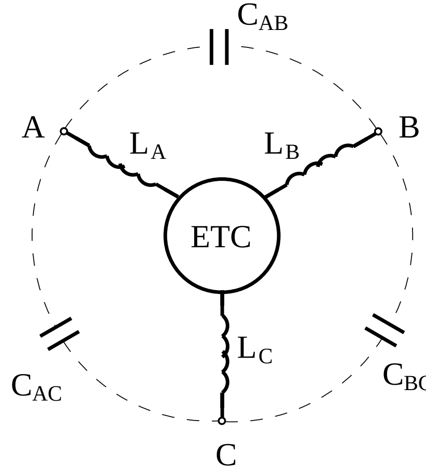


Fig. 3.64.

Un exemplu edificator asupra modului în care se modelează elementele reale de circuit îl reprezintă modelul transformatorului. Acesta la frecvenţe joase poate fi modelat ca un cuadripol diport (fig. 65) ce conţine o pereche de bobine cuplate. Prezenţa miezului poate fi modelată printr-o a treia bobină cuplată cu cele asociate celor două înfăşurări.

În anumite regimuri capacitatea dintre înfăşurări poate juca un rol important, introducerea ei determinând transformarea diportului într-un cuadripol general, la care $i_1 \neq -i_3$ şi $i_2 \neq -i_4$, ceea ce impune caracterizarea elementului nu prin două relaţii $(i_1,\, i_2) \rightarrow (u_1,\, u_2)$ ci prin trei relaţii $(i_1,\, i_2,\, i_3) \rightarrow (V_1,\, V_2\, V_3)$ capabile să exprime modul de variaţie al potenţialelor în funcţie de curenţii din borne.

Se constată că problema determinării celor mai potrivite modele pentru elementele reale de circuit nu este o problemă simplă, necesitând rezolvarea unor

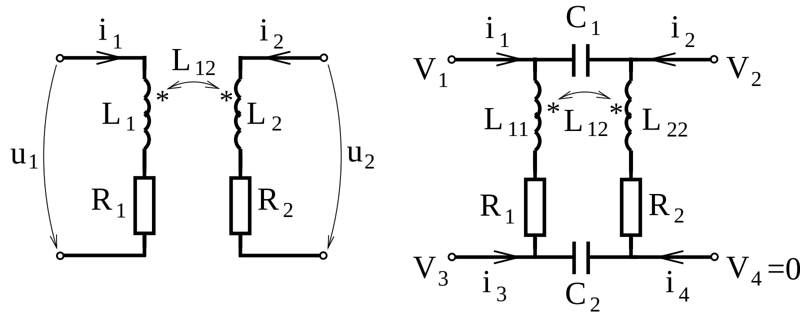


Fig. 3.65.

probleme complicate de câmp electromagnetic, dar şi cunoştinţe aprofundate de teoria circuitelor electrice. Adoptarea unor modele necorespunzătoare pote determina nu numai descrierea eronată a elementului ci chiar imposibilitatea de a găsi o soluţie a circuitului cu elemente ideale.

Aplicaţia 1: Să se determine frecvenţa până la care se poate neglija inductivitatea parazită a unui rezistor.

Se consideră un rezistor cu rezistenţa R şi cu inductivitatea L, (fig. 66) parcurs de curentul $i(t) = I \sin \omega t$.

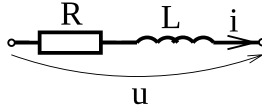


Fig. 3.66.

Tensiunea la bornele acestui element este:

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} = RI \sin \omega t + L\omega I \cos \omega t = I\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \sin(\omega t + \varphi).$$

Dacă neglijăm inductivitatea parazită $L = 0$, rezultă $u' = Ri = IR \sin \omega t$.

Eroarea relativă a valorii maxime a curentului este:

$$\frac{u - u'}{u'} = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} - R}{R} = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2} - 1.$$

Impunând ca o limită admisibilă a erorii $\varepsilon = 1\%$, rezultă:

$$1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2 \leq (1 + \varepsilon)^2,$$

ceea ce corespunde la pulsaţia:

$$\omega < \frac{R}{L}\sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - 1} = \frac{R}{L}\sqrt{\varepsilon^2 - 2\varepsilon} \simeq \varepsilon\frac{R}{L}.$$

De exemplu, pentru $R = 100\Omega$ şi $L = 1$mH, rezultă $\omega \leq 10^6$ rad/s, ceea ce corespunde la aproximativ 200kHz.

Aplicaţia 2: Prin modelarea unui generator real cu parametrii (E, r) cu un generator de tensiune cu t.e.m. E se introduce o eroare.

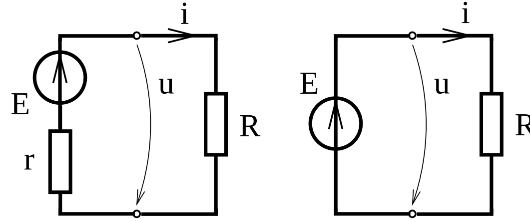


Fig. 3.67.

Considerând că la bornele generatorului se află o rezistenţă de sarcină R, rezultă valoarea exactă a intensităţii:

$$i = \frac{E}{R + r},$$

şi valoarea aproximativă $i' = E/R$. Eroarea relativă de modelare:

$$\varepsilon' = \frac{i - i'}{i} = \frac{\dfrac{E}{R + r} - \dfrac{E}{R}}{\dfrac{E}{R + r}} = -\frac{r}{R},$$

depinde invers proporţional de rezistenţa de sarcină R. De exemplu, pentru $R > 100r$, eroarea de modelare $|\varepsilon| < 1\%$ şi rezistenţa internă se poate neglija faţă de cea de sarcină.

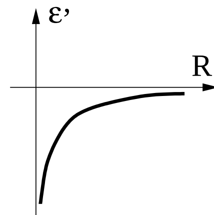


Fig. 3.68.

Dacă acelaşi generator real se modelează cu un generator ideal de curent cu c.e.m. $J = E/r$, atunci curentul aproximativ are valoarea $i'' = J$ şi eroarea de

aproximare este:

$$\varepsilon'' = \frac{i - i''}{i} = \frac{\dfrac{E}{R+r} - \dfrac{E}{r}}{\dfrac{E}{R-r}} = -\frac{R}{r} = -\frac{g}{G},$$

în care $G = 1/R$ şi $g = 1/r$.

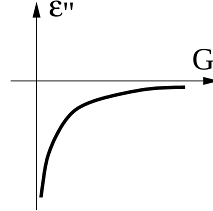


Fig. 3.69.

Dacă conductanţa internă g este mult mai mică decât cea externă G, eroarea de modelare este neglijabilă. De exemplu, dacă $g < G/100$, atunci $|\varepsilon''| < 1\%$.

Rezultă că un generator real poate fi modelat cu un generator ideal de curent, dacă rezistenţa sa internă $r = 1/g$ este mult mai mare decât cea de sarcină $R = 1/G$.

Aplicaţia 3: Eroarea de modelare a unui amplificator operaţional.

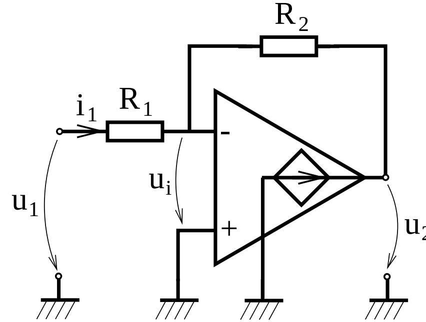


Fig. 3.70.

Se consideră circuitul amplificator inversor (fig. 70) în care amplificatorul operaţional se consideră cu amplificare A în buclă deschisă finită.

Ecuaţiile circuitului sunt:

$$u_1 = R_1 i_1 - u_i \quad \Rightarrow \quad u_i = R_1 i_1 - u_1$$

$$u_2 = A u_i = -R_2 i_1 - u_i \quad \Rightarrow \quad A R_1 i_1 - A u_1 = -R_2 i_1 - R_1 i_1 + u_1$$

$$i_1(AR_1 + R_2 + R_1) = (A+1)u_1 \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{A+1}{AR_1 + R_1 + R_2}u_1$$

$$u_i = \left[\frac{R_1(A+1)}{(A+1)R_1 + R_2} - 1\right] = -u_1\frac{R_2}{(A+1)R_1 + R_2}$$

$$u_2 = -u_1\frac{AR_2}{(A+1)R_1 + R_2}$$

Dacă $A \to \infty$ se constată că: $i_1 \to i_1{}' = u_1/R_1$, $u_i \to u_i{}' = 0$ şi $u_2 \to u_2{}' = -u_1R_2/R_1$. În consecintă, eroarea relativă asupra tensiunii de ieşire obţinută prin utilizarea modelului perfect pentru amplificatorul operaţional este:

$$\varepsilon = \frac{u_2' - u_2}{u_2'} = \frac{\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{A}{(A+1)R_1 + R_2}}{\dfrac{1}{R_1}} = \frac{R_1 + R_2}{(A+1)R_1 + R_2} = \frac{R_1 + R_2}{AR_1 + R_1 + R_2}.$$

În particular, în cazul în care $R_1 = R_2 = R$, rezultă că $\varepsilon = 2/(2+A)$, care pentru valori uzuale $A = 2 \cdot 10^5$ corepunde la o valoare extrem de mică $\varepsilon = 10^{-5}$. În consecinţă, modelul perfect al amplificatorului operaţional este satisfăcător pentu aplicaţiile practice.

3.16 Modelarea cu elemente neliniare ideale

Modelarea elementelor reale de circuit a căror comportare este esenţial neliniară trebuie făcută folosind elemente ideale neliniare. Cel mai simplu element neliniar de circuit este rezistorul neliniar. Un astfel de rezistor comandat în tensiune este caracterizat de o funcţie reală $i = g(u)$, care poate fi aproximată oricât de bine printr-o funcţie liniară pe porţiuni:

$$i = \bar{g}(u) = \begin{cases} m_0u + n_0, & u < u_1 \\ m_1u + n_1, & u \in (u_1, u_2) \\ \dots & \\ m_{n-1}u + n_{n-1}, & u \in (u_{n-1}, u_n) \\ m_nu + n_n, & u > u_n \end{cases}$$

Valorile constantelor m_k, n_k pot fi determinate din condiţiile de interpolare $g(u_k) = \bar{g}(u_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, la care se adaugă relaţiile $g(u_0) = \bar{g}(u_0)$, $g(u_n + 1) = \bar{g}(u_n + 1)$, necesare determinării pantelor segmentelor extreme.

Cu cât numărul n al punctelor de frângere este mai mare, cu atât eroarea de aproximare poate fi făcută mai mică. Un rol important îl joacă punctele de frângere u_k, $k = 1, n$, a căror alegere se recomandă să fie făcută, astfel încât să se

minimizeze eroarea de aproximare. Considerând funcţia $\bar{g}$ continuă, caracteristica poate fi reprezentată compact, cu ajutorul funcţiei modul, sub forma:

$$i = \bar{g}(u) = a_0 + a_1 u + \sum_{j=1}^{n} b_j \left| u - u_j \right|,$$

unde $u_1 < u_2 < \ldots < u_n$ sunt tensiunile în punctele de frângere, iar

$$a_1 = (m_0 + m_n)/2;$$

$$b_j = (m_j - m_{j-1})/2;$$

$$a_0 = \bar{g}(0) - \sum_{j=1}^{n} b_j |u_j|.$$

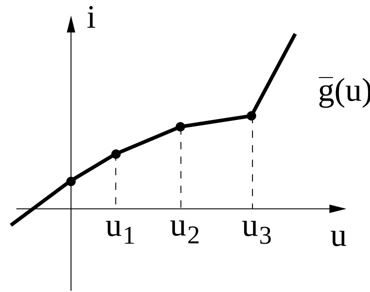


Fig. 3.71.

Se constată că această reprezentare necesită doar $2(n+1)$ constante reale.

Pe fiecare porţiune $u \in (u_k,\, u_{k+1})$, elementul având o caracteristică de forma $i = m_k u + n_k$, admite o schemă echivalentă de tip generator real de curent cu conductanţa internă $G_k = m_k$ şi curentul electromotor $J_k = n_k$.

Prin utilizarea diodelor perfecte se poate stabili o schemă echivalentă care modelează elementul neliniar pe tot domeniul $u \in R$. Se constată că elementul de circuit alcătuit prin înserierea unei astfel de diode cu o sursă reală de tensiune (fig. 72.a) are caracteristica:

$$i = \frac{1}{2} G \left[|u - E| + (u - E) \right] = \begin{cases} 0, & u \leq E \\ G(u - E), & u > E \end{cases}$$

al cărui grafic este reprezentat în figura 72.b.

Acest element are doi parametri G, E şi este simbolizat prin $(D,\, R,\, E)$, fiind un element unidirecţional, la care $i > 0$.

Dacă $i > 0$ dioda perfectă se comportă ca un conductor perfect iar $u = Ri + E$, ceea ce corespunde la $i = (u - E)/R = G(u - E)$, cu $(u - E) > 0$. În caz contrar, $(u - E) \leq 0$, dioda se comportă ca un izolator perfect şi curentul este nul.

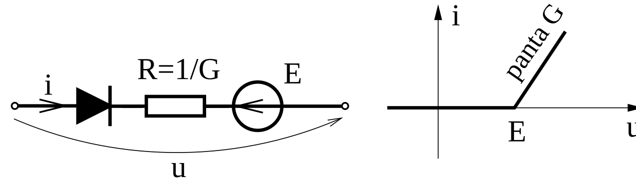


Fig. 3.72.

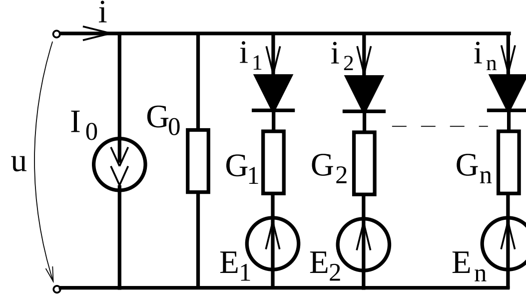


Fig. 3.73.

Prin conectarea în paralel a unor elemente de acest tip, cu un singur punct de frângere, se obţine un element de circuit cu caracteristica liniară pe porţiuni (fig. 73).

La acest circuit s-a conectat în paralel şi o sursă reală de curent (I_0, G_0) pentru a modela corespunzător comportarea la limita $u \to -\infty$.

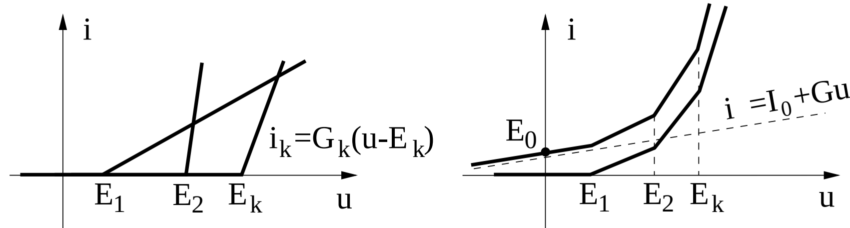


Fig. 3.74.

Caracteristica elementului (fig. 74.b) astfel construit este:

$$i = I_0 + G_0 u + \sum_{k=1}^{n} i_k = I_0 + G_0 u + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} G_k [|u - E_k| - (u - E_k)].$$

Alegând tensiunile electromotoare $E_k = u_k$, corespunzător punctelor de frângere, conductanţele $G_k = 2b_k$ şi parametri $I_0 = a_0 - \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} G_k E_k$, $G_0 = a_1 +$

$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} G_k$ rezultă că acest circuit poate modela orice rezistor neliniar controlat în tensiune cu caracteristică liniară pe porţiuni şi în mod aproximativ orice rezistor neliniar cu caracteristică $u - i$ continuă.

Dacă în anumite zone, rezistorul are conductanţa dinamică negativă este necesară utilizarea unor elemente cu caracteristica: $i = 1/2\,G[|u - E| + (u - E)]$, cu $G < 0$.

Aceste elemente active pot fi obţinute prin "negativarea" curentului din elementele (D, R, E). Noul element, simbolizat prin(D, R, E) este tot un element unidirecţional dar cu $i < 0$.

Rezultatele obţinute pot fi aplicate prin dualitate şi rezistoarelor controlate în curent, la care funcţia caracteristică $u = f(i)$ poate fi aproximată liniar pe porţiuni prin:

$$u = \bar{f}(i) = a_0 + a_1 u + \sum_{k=1}^{n} |i - i_k|.$$

Elementul cu caracteristica:

$$u = \frac{1}{2}R[|i - J| + (i - J)] = \begin{cases} 0, & i \leq J \\ r(i - J), & i > J \end{cases}$$

are un singur punct de frângere, plasat în $i = J$ şi poare fi realizat dintr-o sursă reală de curent, conectată în paralel cu o diodă perfectă (fig. 75.a).

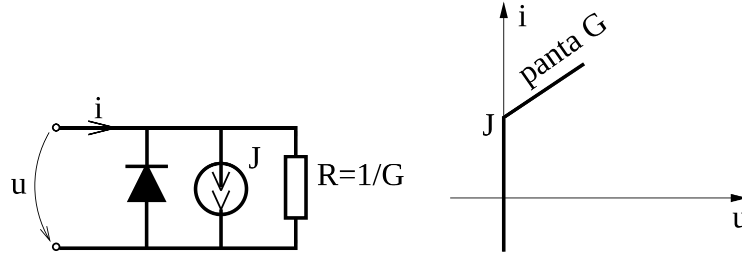


Fig. 3.75.

Acest element simbolizat prin (D, G, J) este controlat în curent. Dacă $u > 0$, dioda perfectă se comportă ca un izolator perfect iar $i = J + Gu$, ceea ce corespunde la $u = R(i - J) > 0$, deci $i > j$. Dacă $i < J$, atunci dioda perfectă se comportă ca un conductor perfect şi $u = 0$.

Prin conectarea în serie a unor astfel de elemente de circuit se poate modela funcţionarea oricărei caracteristici $u - i$ liniare pe porţiuni (fig. 76.a).

Fiecărui punct de frângere din caracteristica $i = f(u)$ îi corespunde o celulă (D, G, J):

$$u = E_0 + R_0 i + \sum_{k=1} u_k = E_0 + R_0 i + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} R_k[|i - J| - (i - J)].$$

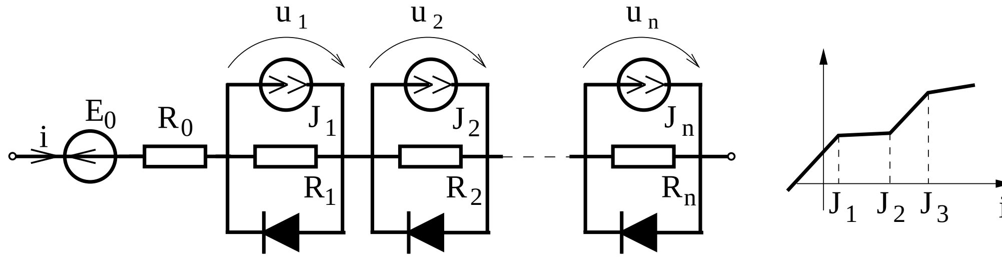


Fig. 3.76.

Alegând curenţii electromotori $J_k = i_k$, corespunzător punctelor de frângere, rezultă rezistenţele $R_k = 2b_k$ şi parametri sursei reale de tensiune $E_0 = G_0 - \frac{1}{2}\sum R_k J_k$, $R_0 = a_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} R_k$ care permit modelarea comportării elementului pentru $i < J_1$.

Pentru modelarea caracteristicii de magnetizare $\varphi - i$ a bobinelor neliniare se poate utiliza de asemenea tehnica aproximării liniare pe porţiuni. Folosirea surselor liniare comandate în derivată permite modelarea bobinelor neliniare cu ajutorul rezistoarelor liniare. De exemplu, circuitul din figura 77 are următoarea

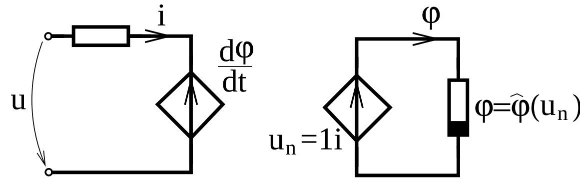


Fig. 3.77.

comportare pe la borne:

$$u = Ri + \frac{d\varphi}{dt} = Ri + \frac{d\widehat{\varphi}(u_m)}{dt} = Ri + \frac{d\widehat{\varphi}(i)}{dt},$$

modelând funcţionarea unei bobine neliniare reale cu rezistenţa înfăşurării R şi cu caracteristica de magnetizaţie dată de funcţia $\widehat{\varphi}$. S-au folosit în afara rezistorului liniar şi a sursei de tensiune comandată liniar în curent, un rezistor neliniar controlat în tensiune şi o sursă de tensiune controlată în derivata "curentului" φ. Deoarece circuitul $(u_m, \widehat{\varphi})$ este străbătut de un curent egal cu fluxul magnetic φ el se numeşte circuit magnetic, iar "tensiunea" $u_m = i$ se numeşte tensiune magnetică. Această tehnică a circuitelor magnetice poate fi utilizată şi la modelarea bobinelor neliniare cuplate magnetic.

Bobinele din figura 78.a, cu n_1 şi respectiv n_2 spire înfăşurate pe un miez neliniar pot fi modelate prin circuitul neliniar cu surse comanate în derivată,

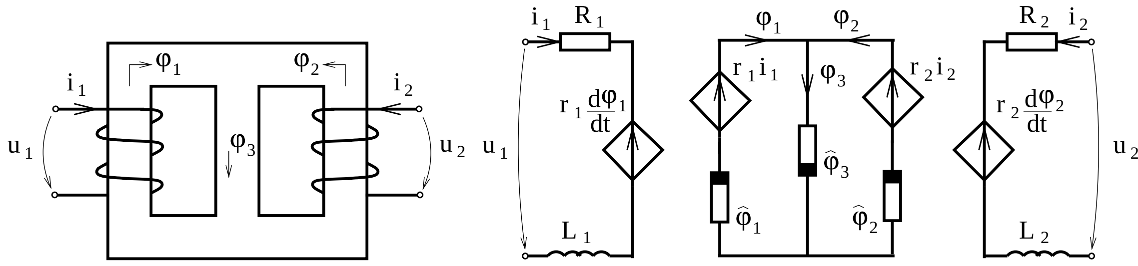


Fig. 3.78.

prezentate în figura 78.b. Acest circuit conţine pe lângă cele două rezistenţe electrice ale înfăşurărilor R_1,R_2 şi trei ,,rezistoare" neliniare cu caracteristicile $\widehat{\varphi}_1$, $\widehat{\varphi}_2$, $\widehat{\varphi}_3$, care modelează dependenţele flux-tensiune magnetică, specifice celor trei tronsoane ale miezului magnetic. La acest circuit pot fi adăugate bobinele liniare cu inductivităţile L_1, L_2, ce caracterizează dispersia magnetică prin aer, care este un mediu liniar. La frecvenţe mari devin importante efectele de curenţi turbionari (pierderile în miez) şi cele capacitive, ceea ce impune completarea schemei cu noi elemente ideale.

Pentru modelarea elementelor multipolare rezistive neliniare se folosesc sursele comandate neliniar. Folosind modelul perfect al amplificatorului operaţional, şi aceste elemente se pot reduce la rezistoare neliniare.

Circuitul cuadripol din figura 79.a se comportă ca o sursă de tensiune comandată în curent, a cărei caracteristică neliniară:

$$u_2 = -f(i_1),$$

este determinată de caracteristica $u - i$ a rezistorului neliniar din reacţie.

Circuitul cuadripol din figura 79.b se comportă ca o sursă de curent comandată în tensiune, a cărei caracteristică:

$$i_2 = g(u_1),$$

este identică cu caracteristica $i - u$ a rezistorului neliniar conţinut.

Prin combinarea acestor circuite (fig. 80.a) se obţine un element cuadripol, la care

$$i_2 = g({u_2}') = g(-f(i_1)),$$

deci o sursă de curent controlată neliniar în curent.

Circuitul din figura 80.b satisface relaţiile:

$$u_2 = -f(i_1) = -f(g(u_1)),$$

specifice unei surse de tensiune comandată neliniar în tensiune.

Aplicaţie:

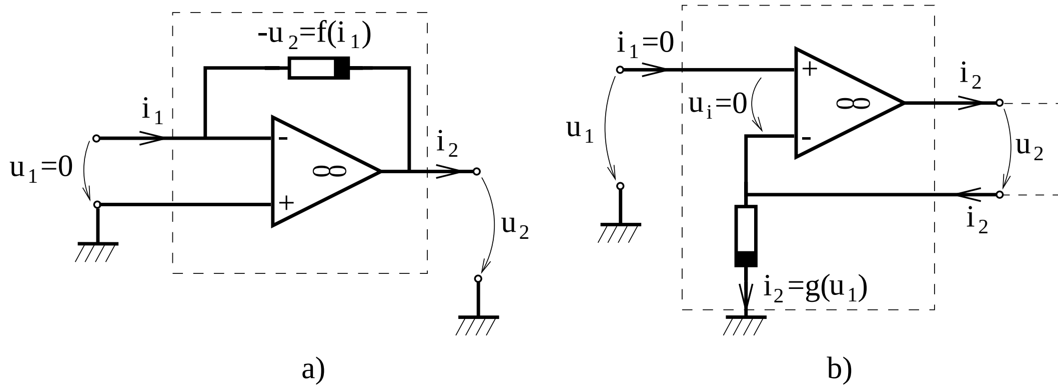


Fig. 3.79.

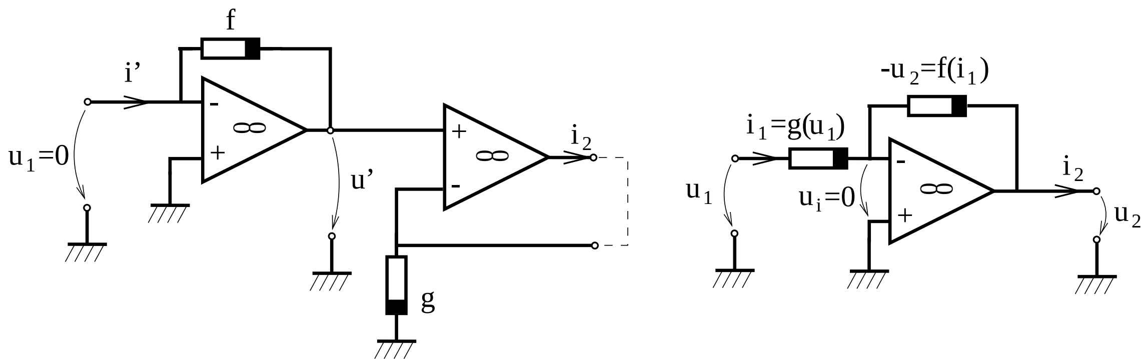


Fig. 3.80.

Considerând rezistorul $i_1 = g(u_1) = Gu_1$ liniar, rezultă $u_2 = -f(Gu_1)$.

În particular, dacă rezistorul neliniar din reacţie este alcătuit din două diode Zener, conectate în serie (fig. 81.a) astfel încât $u = u_1 + u_2 = U_2\text{sgn}(i)$ se constată că:

$$u_2 = -U_2\text{sgn}(Gu_1),$$

ceea ce corespunde unei caracteristici de transfer reprezentate în figura 82, similară amplificatorului operaţional cu limitare şi identică cu aceasta, dacă se mai introduce un amplificator inversor.

Aplicaţie:

Un exemplu interesant este cel din figura 83, în care reacţia negativă este asigurată de o diodă semiconductoare.

Aplicând o tensiune de intrare $u > E$, intensitatea curentului prin resistenţa R are valoarea $i = (u - E)/R > 0$, ceea ce asigură polarizarea directă a diodei D, care în acest caz este în conducţie. Tensiunea de ieşire are în consecinţă o mică valoare negativă, egală cu opusul căderii de tensiune pe diodă, ceea ce face ca

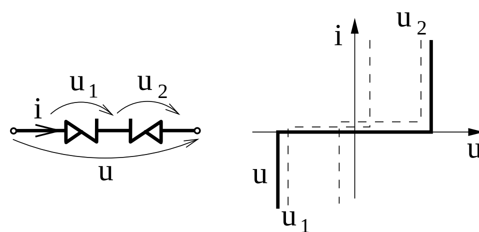


Fig. 3.81.

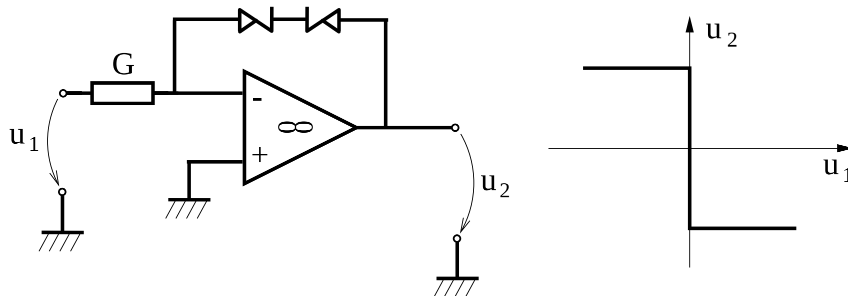


Fig. 3.82.

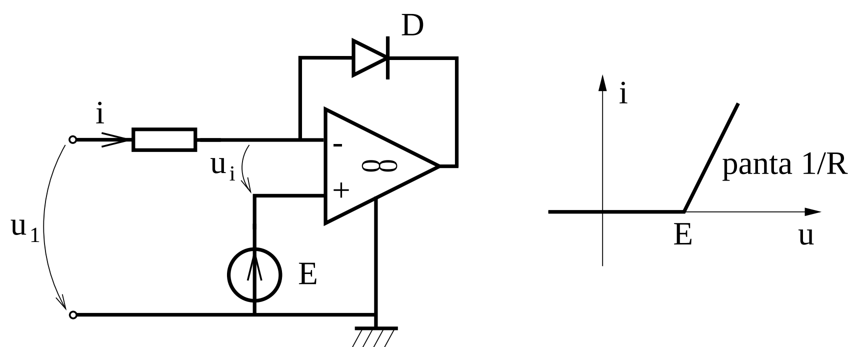


Fig. 3.83.

amplificatorul operaţional să nu se satureze. În consecinţă, relaţia $u-i$ la poarta de intrare are forma $i = (u - E)/R$, pentru $u > E$. Dacă $u < E$, intensitatea curentului prin rezistorul R are tendinţa să devină negaivă ceea ce blochează dioda D. Tensiunea de intrare a amplificatorului operaţional $u_i = E - Ri + u$ ia valori care îl saturează, determinând o tensiune de ieşire $U_2 = U_0$. Dioda D se blochează puternic, deoarece tensiunea la bornele sale devine $u-Ri-U_0 < 0$, ceea ce anulează practic curentul i. În consecintă, pentru $u \leq E$ curentul de intrare este $i = 0$ (fig. 83.b). În acest fel se obţine un circuit a cărui comportare se apropie foarte mult de cea a unui rezstor neliniar cu un singur punct de frângere. În particular, dacă $E = 0$ şi $R = 0$, comportarea circuitului pe la bornele de intrare este foarte asemănătoare cu cea a diodei perfecte, chiar dacă în reacţie se foloseşte o diodă reală. În mod dual, se demonstrează că circuitul din figura 84.a are caracteristica din figura 84.b.

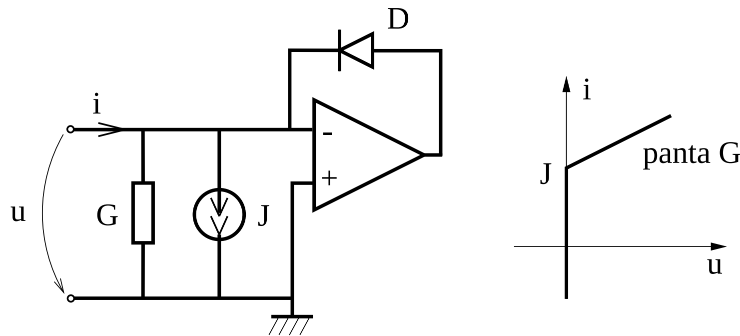


Fig. 3.84.

Aplicaţie: Modelarea tranzistorului bipolar.

Una din cele mai folosite componente electronice este tranzistorul bipolar. Acesta este un element de circuit cu trei terminale, numite: emitor, bază şi colector. În figura 85.a este reprezentat simbolul tranzistorului bipolar *npn*.

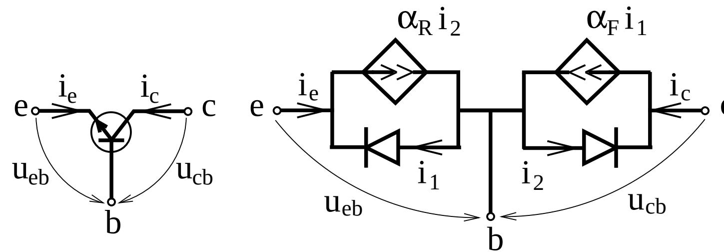


Fig. 3.85.

O caracterizare suficient de bună a acestui element este dată, la frecvenţe

mici, de ecuaţiile Ebers-Moll:

$$\begin{cases} i_e = -I_{ES}(e^{-u_{eb}/V_0} - 1) + \alpha_R I_{CS}(e^{-u_{cb}/V_0} - 1); \\ i_c = \alpha_F I_{ES}(e^{-u_{eb}/V_0} - 1) - I_{CS}(e^{-ucb/V_0} - 1); \end{cases}$$

Se constată că:

$$i_1 = -I_{ES}(e^{-u_{eb}/V_0} - 1) = f_1(u_{eb});$$
$$i_2 = -I_{CS}(e^{-u_{cb}/V_0} - 1) = f_2(u_{cb});$$

sunt funcţiile caracteristice ale unor diode semiconductoare.

Funcţiile caracteristice:

$$\begin{cases} i_e = g_e(u_{eb},\, u_{cb}); \\ i_c = g_c(u_{eb},\, u_{cb}); \end{cases}$$

au următoarea formă:

$$i_e = i_1 - \alpha_R i_2 = f_1(u_{eb}) - \alpha_R \cdot f_2(u_{cb});$$
$$i_c = -\alpha_F i_1 + i_2 = -\alpha \cdot f_1(u_{u_e b}) + f_2(u_{cb});$$

care permite adoptarea schemei echivalente din figura 85.b.

Schema echivalentă Ebers-Moll este alcătuită din două rezistoare neliniare controlate în tensiune şi două surse de curent comandate liniar în curent. În acest model tranzistorul este caracterizat de patru parametri V_0, I_{ES}, I_{CS}, α_R şi α_F.

De obicei tranzistorul bipolar este utilizat în conexiune cu colector comun, fiind descris în modul hibrid, prin funcţiile:

$$\begin{cases} u_{be} = f_b(i_b,\, u_{CE}); \\ i_c = f_c(i_b,\, u_{CE}); \end{cases}$$

ale căror grafice sunt reprezentate în figura 86.

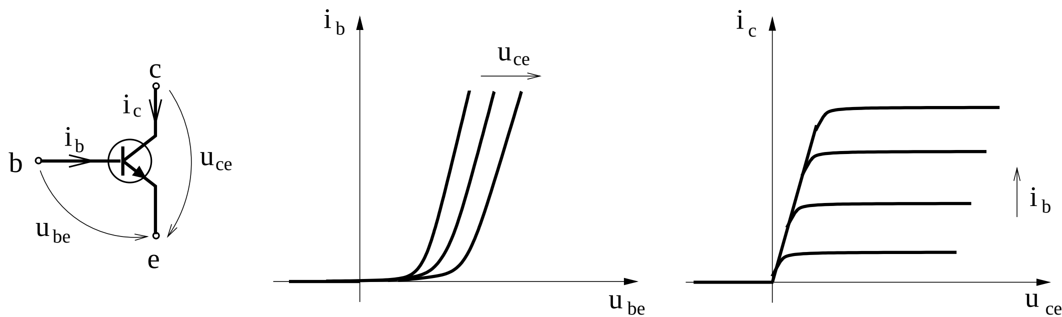


Fig. 3.86.

În acest mod de conexiune, poarta de intrare $b-c$ are o caracteristică $i_b - u_{bc}$ asemănătoare unei diode semiconductoare, cu observaţia că aceasta este uşor modificată de parametrul u_{ce}. Poarta de ieşire $c-e$ are o caracteristică puternic dependentă de parametrul i_b. În consecinţă, porta de intrare poate fi modelată ca o diodă semiconductoare înseriată cu o sursă de tensiune comandată liniar în tensiunea de intrare. Poarta de ieşire poate fi modelată cu o sursă de curent comandată liniar în curentul de intrare, care este curentul de bază. Circuitul din figura 87.a permite modelarea cu caracteristici liniare pe porţiuni a tranzistorului în conexiunea cu colector comun pentru $u_{ce} > 0$.

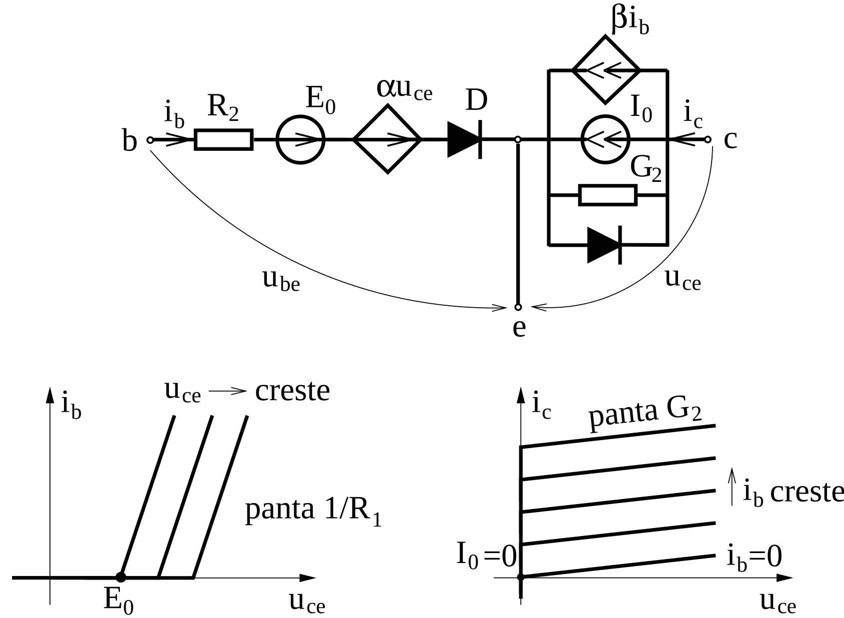


Fig. 3.87.

Deoarece R_1, G_2, I_0 şi α au valori mici deseori se aplică, cu bune rezultate, modelul simplificat din figura 88, alcătuit dintr-o sursă ideală de tensiune, cu t.e.m. $E_0 \simeq 0,6$V, o sursă de curent comandată în curent şi o diodă perfectă D.

Se constată că acest model este caracterizat în principal de parametrul β, numit factorul de amplificare în curent şi care are valori în plaja $10 - 10^3$.

Modelele prezentate au un caracter rezistiv şi nu descriu corect comportarea tranzistorului bipolar la frecvenţe ridicate. Pentru a descrie această comportare, s-au elaborat modele mai complicate, care conţin în schemele lor echivalente şi condensatoare, liniare sau neliniare. De exemplu modelul Gummel-Poon al tranzistorului bipolar este un element controlat in sarcină.

În concluzia acestui paragraf se poate afirma că pentru modelarea elementelor reale de circuit, în afara elementelor ideale dipolare liniare (R, L, C, e, j) se mai folosesc elementele dipolare rezistive neliniare (care admit ca element primitiv

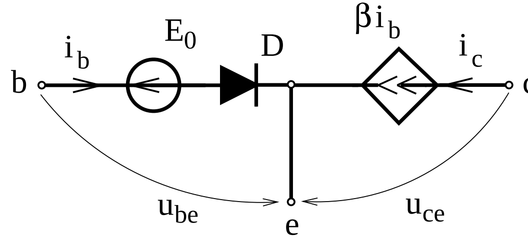


Fig. 3.88.

dioda perfectă) şi sursele comandate liniar sau neliniar (care admit ca element primitiv amplificatorul operaţional perfect).

Aplicaţie: Eroarea de modelare a unei diode semiconductoare.

Fie o diodă semiconductoare, cu caracteristica:

$$i = I_S(e^{u/V} - 1),$$

în care $I_S = 1\mu A$ şi $V = 0,026V$, ce se aproximează liniar pe porţiuni prin:

$$i' = \begin{cases} G_i u, & u < 0 \\ G_d u, & u > 0 \end{cases}$$

astfel încât cele două caracterisitici să se intersecteze pentru $u_1 = -10V$, $u = 0$, şi $u_2 = 1V$.

Rezultă conductanţa inversă:

$$G_i = \frac{i_1}{u_1} = \frac{I_S}{u_1}(e^{u_1/V} - 1) \simeq \frac{10^{-6}}{10} = 10^{-7}\text{S},$$

şi cea directă:

$$G_d = \frac{i_2}{u_2} = \frac{I_S}{u_2}(e^{u_2/V} - 1) = 10^{-6}e^{40} = 2,35 \cdot 10^{11}\text{S},$$

Eroarea absolută de aproximare este:

$$\varepsilon = i - i' = \begin{cases} I_S(e^{u/V} - 1) - G_i u, & u < 0 \\ I_S(e^{u/V} - 1) - G_d u, & u > 0 \end{cases}$$

şi are valoarea maximă în intervalul (u_1, u_2) pentru unul din punctele în care $d\varepsilon/du = 0$

În polarizare directă:

$$\frac{d\varepsilon}{du} = \frac{I_S}{V}e^{u/V} - G_d = 0 \quad \Rightarrow \quad u = V\ln\frac{VG_d}{I_S},$$

ceea ce corespunde erorii absolute.

DECALCULAT

3.17 Modele pentru mici variaţii

Circuitele electrice cu elemente liniare sau neliniare sunt caracterizate în regim staţionar pentru fiecare latură $k = 1, L$ de o tensiune U_k şi de o intensitate I_k, constante în timp. Sursele ideale ale unui astfel de circuit trebuie să aibă paramentrii E_k şi J_k constanţi în timp.

Dacă la un moment dat, sursele încep să-şi modifice parametri, circuitul părăseşte regimul staţionar. Considerând că parametri surselor ideale:

$$e_k(t) = E_k + \bar{e}_k(t);$$
$$j_k(t) = J_k + \bar{j}_k(t);$$

au variaţii $\bar{e}_k$ şi $\bar{j}_k$ suficient de mici, pentru majoritatea circuitelor se poate afirma că acestea corespund unor variaţii tot mici ale curenţilor şi tensiunilor circuitului:

$$i_k(t) = I_k + \bar{i}_k(t);$$
$$u_k(t) = U_k + \bar{u}_k(t).$$

Respectiv, dacă $\bar{e}_k$, $\bar{j}_k \to 0$ atunci $\bar{i}_k(t)$, $\bar{u}_k(t)$ tind şi ele către zero.

În această situaţie, punctele de frângere ale elementelor neliniare au excursii limitate în jurul punctului de funcţionare corespunzător regimului staţionar. Această observaţie permite ca pentru fiecare element neliniar, caracteristica sa să fie aproximată, suficient de bine cu o dreaptă, în jurul punctului de funcţionare din regim staţionar.

Cea mai bună aproximare liniară a caracteristicii se obţine reţinând primii doi termeni din seria Taylor asociată.

Considerând spre exemplu, un rezistor dipolar controlat în curent (fig. 89) cu caracteristica $u = f(i)$, al cărui punct de funcţionare în regim staţionar (numit şi punct static de funcţionare) satisface relaţia $U = f(I)$, rezultă că pentru mici variaţii ale curentului se poate adopta aproximarea:

$$u = f(I_i) = f(I) + f'(I)\bar{i} + \frac{1}{2}f''(I)\bar{i}^2 + \ldots \simeq U + R_d\bar{i}.$$

În consecinţă micile variaţii ale tensiunii $\bar{u} = u - U = R_d\bar{i}$ sunt proporţionale cu variaţiile curentului, constanta de proporţionalitate fiind rezistenţa dinamică R_d în punctul de funcţionare. Raţionamente asemănătoare permit determinarea schemelor echivalente pentru mici variaţii ale oricărui element dipol neliniar (fig. 89).

Şi în cazul elementelor multipolare rezistive neliniare de circuit electric, schemele echivalente de mici variaţii sunt tot circuite liniare, a căror structură depinde de modul de control. De exemplu, în cazul elementelor controlate în tensiune, prin dezvoltare în serie Taylor se obţine:

$$i_1 = g_1(u_1, u_2) \simeq g_1(U_1, U_2) + \frac{\partial g_1}{\partial u_1}\bar{u}_1 + \frac{\partial g_1}{\partial u_2}\bar{u}_2 = I_1 + g_{11}\bar{u}_1 + g_{12}\bar{u}_2;$$

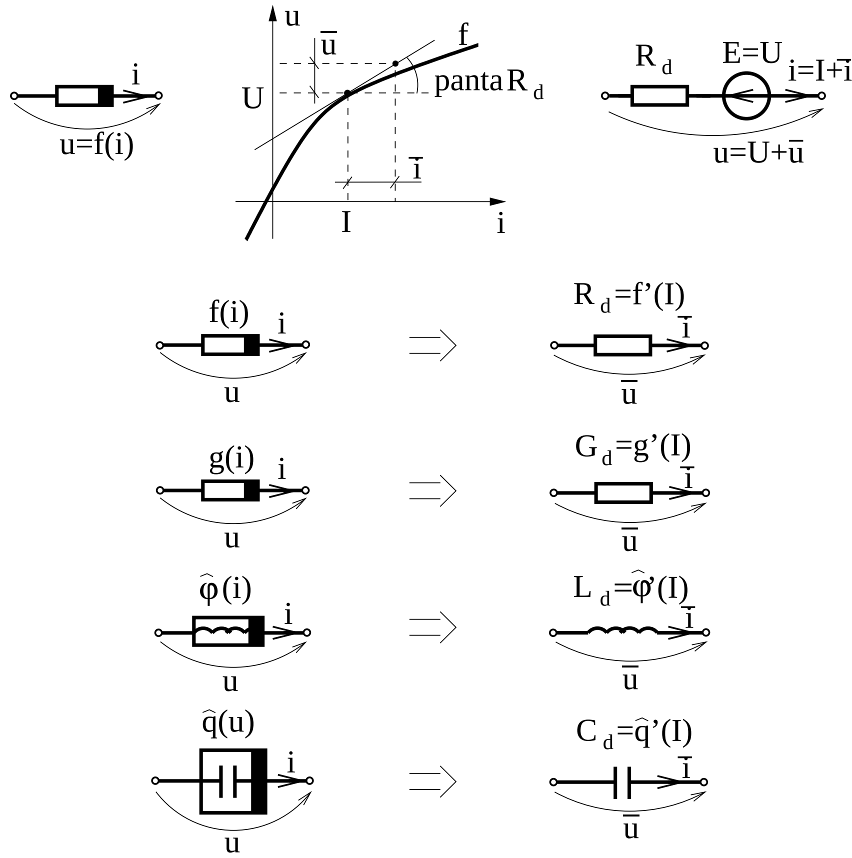


Fig. 3.89.

$$i_2 = g_2(u_1,\, u_2) \simeq g_2(U_1,\, U_2) + \frac{\partial g_2}{\partial u_2}\bar{u}_1 + \frac{\partial g_2}{\partial u_1}\bar{u}_2 = I_2 + g_{21}\bar{u}_1 + g_{22}\bar{u}_2;$$

Sau pentru variaţiile curenţilor $\bar{i}_1 = i_1 - I_1$, $\bar{i}_2 = i_2 - I_2$:

$$\bar{i}_1 = g_{11}\bar{u}_1 + g_{21}\bar{u}_2;$$
$$\bar{i}_1 = g_{11}\bar{u}_1 + g_{21}\bar{u}_2;$$

în care g_{11}, g_{22}, g_{12}, g_{21} sunt conductanţele dinamice de intrare, ieşire şi respectiv de transfer.

În consecinţă, elementul multipolar rezistiv neliniar de circuit electric admite pentru mici variaţii una din schemele echivalente din figura CEVA, deoarece este un element liniar faţă de aceste variaţii.

Spre exemplu liniarizând modelul Ebers-Moll, rezultă că tranzistorul bipolar admite schema de mici variaţii din figura 90.

Prin liniarizarea modelului hibrib se obţine:

$$u_{be} = f_b(i_b,\, u_{ce}) = f_b(I_b,\, U_{ce}) + \frac{\partial f_b}{\partial i_b}\bar{i}_b + \frac{\partial f_b}{\partial u_{ce}}\bar{u}_{ce};$$

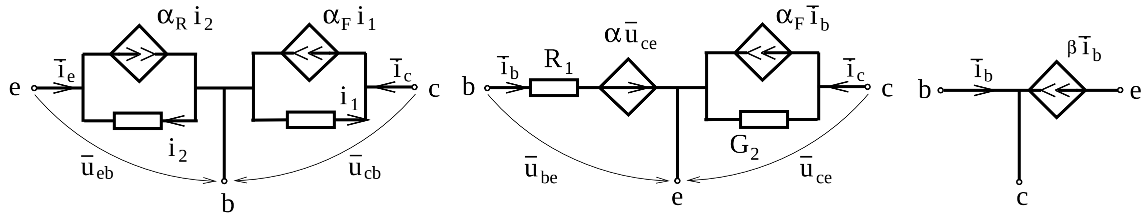


Fig. 3.90.

$$i_c = f_c(i_b,\, u_{ce}) = f_c(I_b,\, U_{ce}) + \frac{\partial f_c}{\partial i_b}\bar{i_b} + \frac{\partial f_c}{\partial i_b}\bar{i_b},$$

în care:

$$h_{11} = \frac{\partial u_{be}}{\partial i_b},\ h_{12} = \frac{\partial u_{be}}{\partial i_b};$$

$$h_{21} = \frac{\partial i_c}{\partial i_b},\ h_{22} = \frac{\partial i_c}{\partial u_{ce}},$$

se numesc parametrii hibrizi ai tranzistorului.

În consecită, tranzistorul bipolar în conexiunea colector comun admite schema de semnal mic din figura CEVA, în care:

$R_1 = h_{11}$- rezistenţa dinamică de intrare;

$G_2 = h_{22}$- conductanţa dinamică de ieşire;

$\alpha = h_{12}$- factorul de transfer invers în tensiune;

$\beta = h_{21}$- factorul de amplitudine în curent.

În particular prin liniarizarea modelului din figura CEVA se obţine schema de mici variaţii din figura CEVA, se constată că la mici variaţii un tranzistor bipolar se comportă, în principal, ca o sursă de curent comandată în curent.

Aplicaţie: Amplificatorul cu tranzistor bipolar.

Pentru ca tranzistorul bipolar să funcţioneze ca un amplificator de mici variaţii este necesar ca punctul său static de funcţionare să se afle într-o poziţie corespunzătoare $u_{BE} > 0$, $i_B > 0$, $u_{CE} > 0$, $i_C > 0$. Aceste condiţii sunt îndeplinite prin polarizarea sa cu ajutorul unor surse staţionare (E_1 şi E_2 în fig. 91)

Dacă peste sursa E_1 se suprapune o tensiune variabilă $\bar{u}_1$, atunci tensiunea de ieşire u_2 va avea variaţiile $\bar{u}_2$, determinate prin analiza circuitului de mici variaţii:

$$u_2 = -R_c\beta\bar{i}_B = -\frac{R_C}{R_B}\beta\bar{u}_1$$

deoarece $\bar{i}_B = \bar{u}_1/R_B$. În consecinţă, circuitul amplificator cu un tranzistor va amplifica variaţiile tensiunii de intrare de $\beta R_C/R_B$ şi va schimba semnul acestora.

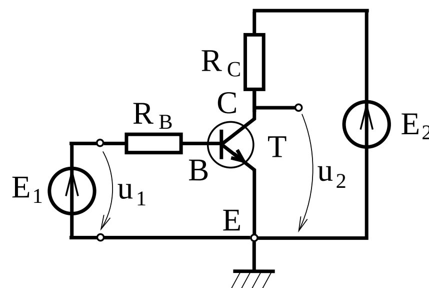


Fig. 3.91.

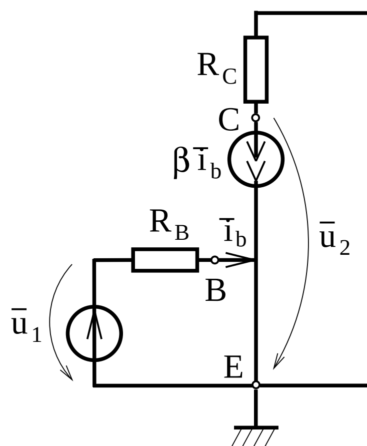


Fig. 3.92.

Capitolul 4

Circuite electrice simple. Teorema de echivalenţă

4.1 Relaţia de echivalenţă a elementelor de circuit

Prin definiţie, două elemente de circuit electric sunt echivalente dacă au aceeaşi comportare pe la borne, respectiv dacă asigură aceeaşi relaţie între tensiuni şi curenţi. În consecinţă, dacă într-un circuit electric se înlocuieşte un element de circuit cu altul echivalent, starea circuitului nu se va modifica.

Pentru caracterizarea stării unui element de circuit şi a interacţiunii acestuia cu exteriorul se folosesc mărimile fizice asociate bornelor (intensităţi, potenţiale) sau perechilor de borne (tensiunile). Aceste mărimi, mai ales atunci când sunt variabile în timp, se numesc semnale electrice. Dacă un anumit semnal electric poate avea o variaţie arbitrară, fără să fie limitată într-un fel de structura internă sau comportarea elementului de circuit, atunci se spune că acest semnal poate fi semnal de intrare sau excitaţie pentru acel element de circuit. În consecinţă, un element de circuit determină clasificarea semnalelor sale electrice în semnale de intrare, care sunt variabile independente ale funcţiei sau operatorului caracteristic şi în semnale de ieşire care sunt variabile dependente ale funcţiei sau operatorului caracteristic elementului. Variabile dependente se numesc şi semnale de răspuns.

De exemplu, un rezistor neliniar controlat în curent poate fi excitat în curent iar tensiunea la borne este un semnal de ieşire (răspuns). Un rezistor controlat în tensiune poate fi excitat în tensiune, caz în care răspunsul îl reprezintă curentul.

Această clasificare nu este întodeauna unică. Dacă de exemplu, rezistorul controlat în curent are o funcţia caracteristică bijectivă el poate fi excitat în curent iar tensiunea la bornele sale este un semnal de ieşire (răspuns). Un rezistor controlat în tensiune poate fi excitat în tensiune, caz în care răspunsul îl reprezintă curentul. În cazul elementelor multipolare, anumite borne pot fi excitate numai în curent iar altele numai în tensiune. În mod similar, în cazul elementelor multi-

port, anumite porţi pot fi excitate numai în curent (de exemplu, cele degenerate în conductoare perfecte sau surse ideale de tensiune) iar altele numai în tensiune (de exemplu, cele degenerate în izolatoare perfecte).

Încercarea de a excita incorect un element de circuit (de exemplu, excitarea unui conductor perfect în tensiune) conduce la contradicţii logice şi este inadmisibilă în teoria circuitelor electrice.

Considerând un element de circuit excitat corect, comportarea sa este complet determinată, dacă răsunsul său este unic pentru orice excitaţie (deci pentru orice mod de variaţie în timp a semnalului de intrare).

În consecinţă, două elemente de circuit rezistive sunt echivalente, dacă ele au aceeaşi dependenţă a semnalelor de ieşire în funcţie de cele de intrare. În particular, în cazul rezistoarelor dipolare, echivalenţa are loc dacă şi numai dacă cele două rezistoare au aceaşi funcţie caracteristică $y = f(x)$, în care s-a notat cu x - semnalul de intrare (u - în cazul elementelor controlate în tensiune şi respectiv i în cazul elementelor controlate în curent) iar cu y - semnalul de ieşire (i în cazul elementelor controlate în tensiune şi respectiv u în caz contrar). Rezultă că pentru semnale de intrare $x = x_1 = x_2$ egale la cele două elemente, semnalele de ieşire $y = y_1 = y_2$ sunt deasemenea egale, oricum ar fi excitaţia x. Datorită caracterului rezistiv al elementelor considerate, comportarea lor rămâne aceeaşi, indiferent de modul în care semnalul de excitaţie variază în timp.

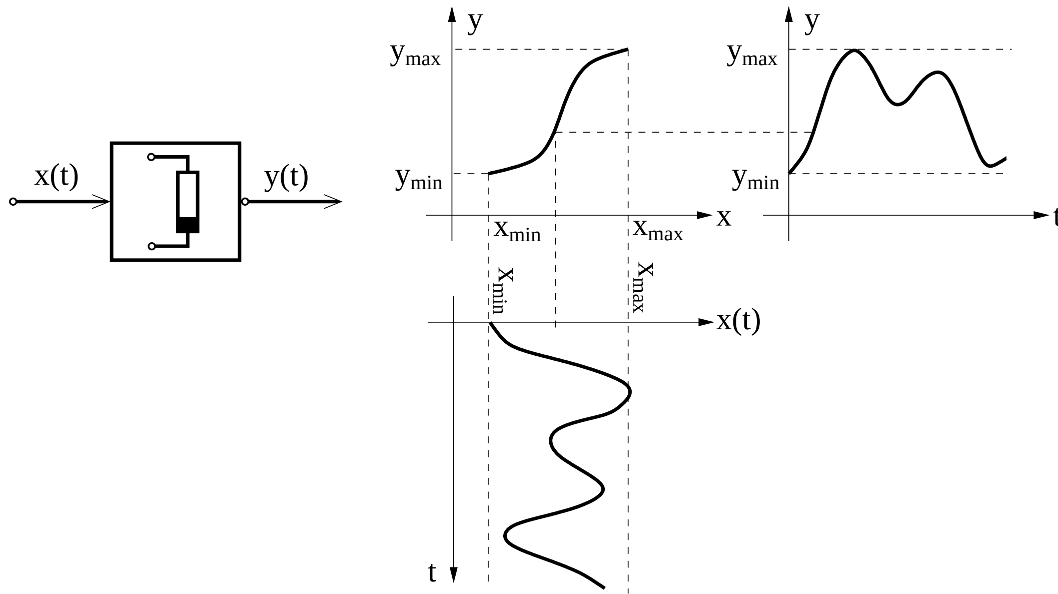


Fig. 4.1.

Urma lăsată de punctul de coordonate (x, y) nu depinde de modul în care variază în timp $x(t)$ în intervalul (x_{min}, x_{max}). Caracteristica $y = f(x)$ a elementului rezistiv neliniar (fig. 1) se exprimă printr-o funcţie $f : R \to R$ şi permite

orice mod de variţie în timp a semnalului de intrare $x(t)$.

Se constată că totuşi pentru a evidenţia pe cale experimentală echivalenţa a două elemente de acest tip ar trebui efectuate o infinitate de experimente, ceea ce este imposibil.

În cazul particular al elementelor de circuit electric liniar, caracteristca în planul $u - i$ fiind o dreaptă, rezultă că sunt necesare şi suficiente doar două experimente pentru a demonstra echivalenţa. Evident, că pentru ca două elemente ideale dipolare rezistive liniare de circuit electric să fie echivalente este suficient ca parametrii acestora să fie egali, în acest caz un singur experiment este suficient pentru a demonstra echivalenţa.

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca două elemente de circuit rezistive multipolare liniare să fie echivalente este ca matricele caracteristice celor două elemente să fie egale. Numărul de experimente necesar evidenţierii echivalenţei este dependent de numărul n de borne (respectiv numărul de porţi, în cazul elementelor multiport). În general numărul minim de experimente este $(n-1)^2$, respectiv n^2 dar în cazul elementelor reciproce (caracterizate prin matrice simetrice), acest număr se reduce la $n(n-1)/2$ şi respectiv la $n(n+1)/2$.

Caracterizarea comportării elementelor reactive de circuit este mai complicată decât a celor rezistive, deoarece dependenţa dintre semnalele de intrare şi ieşire se exprimă în acest caz printr-un operator diferenţial sau integral. Din acest motiv, semnalul de ieşire $y(t)$, de la momentul de timp t depinde nu numai de valoarea semnalului de intrare $x(t)$ de la momentul de timp t ci şi de evoluţia sa până la timpul t.

Două elemente reactive sunt echivalente, dacă ele determină aceleaşi răspunsuri la excitaţii identice cu variaţii arbitrare în timp. În consecinţă pentru orice $x_1(t) = x_2(t)$, $t \in (t_1,\, t_2)$ echivalenţa impune $y_1(t) = y_2(t)$, $t \in (t_1,\, t_2)$.

În continuare se va analiza comportarea elementelor reactive pentru intervalul $t \geq 0$. Presupunând convenţional momentul iniţial $t_1 = 0$ iar excitaţiile aplicate definite pentru $t \in [0,\, \infty)$ vor fi considerate în mod convenţional nule pentru $t < 0$. Aceasta este echivalentă cu înmulţirea lor cu funcţia treaptă unitate:

$$h(t) = \begin{cases} 0,\, t < 0 \\ 1,\, t \geq 0 \end{cases}$$

Analizând comportarea bobinei liniare ideale, la care:

$$u = L\frac{di}{dt},$$

se constată că dacă aceasta este excitată în curent (fig. 2), atunci semnalul de intrare $i(t)$ nu poate avea o variaţie arbitrară în timp, el trebuie să fie continuu şi derivabil iar la momentul iniţial ($t = 0$) trebuie să satisfacă egalitatea $i(0) = i_0$, în care $i_0 = \lim_{\substack{t<0 \\ t\to 0}}$ este condiţia iniţială a bobinei.

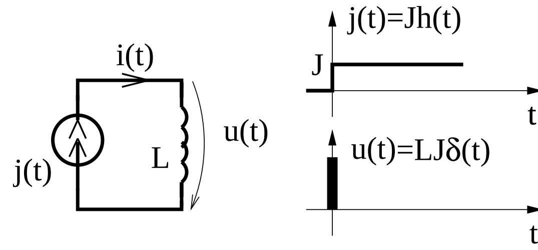


Fig. 4.2.

Prezenţa discontinuităţilor în semnalul de intrare determină apariţia unor tensiuni nedefinite. Acest caz ar putea fi studiat folosind teoria distribuţiilor, tensiunea la borne corespunzătoare unui salt Δi al curentului la momentul t_0 fiind $u = L\Delta i \cdot \delta(t - t_0)$, deci nemărginită. Chiar dacă excitaţia $j(t)$ este continuă şi derivabilă este posibilă apariţia unei supratensiuni nemărginite $u = L(j(o) - i_0)\delta(t)$, datorată condiţiei iniţiale. Din aceste motive se poate afirma că excitaţia în curent a unei bobine este o excitaţie improprie.

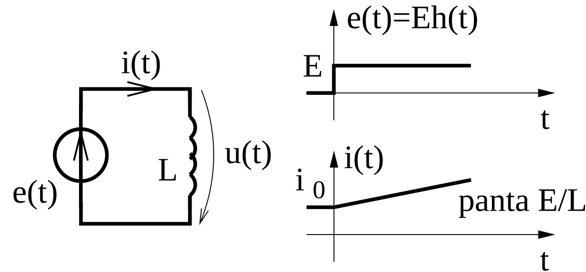


Fig. 4.3.

Excitarea în tensiune a unei bobine liniare ideale, (fig. 3), corespunde relaţiei:

$$i(t) = i_0 + \frac{1}{L}\int_0^t u(t')dt'.$$

Se constată că semnalul de intrare $u(t) = e(t)$, se impun condiţii mult mai puţin restrictive (el trebuie să fie integrabil în timp dar poate fi discontinuu), ceea ce din punct de vedere practic, corespunde unui semnal arbitrar.

În consecinţă, bobina poate fi excitată în tensiune. Răspunsul $i(t)$ se obţine pornind de la excitaţia $u(t)$ prin folosirea unui operator liniar, de integrare. Totuşi relaţia excitaţie - răspuns nu este liniară, decât în cazul particular al condiţiei iniţiale nule $i_0 = 0$.

În cazul excitaţiei treaptă (constante) se constată că răspunsul are o variaţie în timp reprezentată grafic printr-o semidreaptă. Pentru ca două bobine ideale

liniare să fie echivalente este necesar şi suficient ca la exitaţii de tensiune treaptă identice (de exemplu, unitate) să determine răspunsuri identice. Pentru a verifica echivalenţa este suficient să se compare curentul $i(t)$ determinat de $u(t) = E$ la două momente diferite de timp.

În consecinţă sunt suficiente două măsurători pentru a verifica echivalenţa a două bobine lineare ideale. Dacă cele două bobine se vor comporta la fel în acest regim de excitaţie particulară, atunci ele vor avea aceeaşi comportare pentru orice excitaţie.

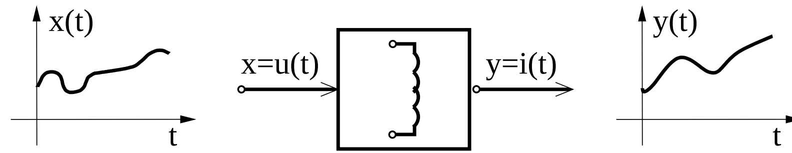


Fig. 4.4.

Pentru caracterizarea relaţiei curent - tensiune impusă de o bobină liniară ideală nu se pot folosi funcţii ci operatori. În cazul excitaţiei improprii în curent, tensiunea $u : (0, \infty) \to R$ se obţine:

$$u = z \cdot i,$$

aplicând intensităţii $i : (0, \infty) \to R$ operatorul diferenţial:

$$z\cdot = L\frac{d\cdot}{dt}$$

numit operator de impedanţă. Domeniul operatorului de z este alcătuit din mulţimea funcţiilor continue şi derivabile care satisfac condiţia suplimentară $i(0) = i_0$ iar codomeniul este spaţiul funcţiilor integrabile.

În cazul excitaţiei în tensiune, intensitatea curentului $i : (0, \infty) \to R$ se obţine:

$$i = j \cdot u,$$

aplicând tensiunii $u : (0, \infty) \to R$ operatorul integral

$$j\cdot = i_0 + \frac{1}{L}\int_0^t \cdot dt'$$

numit operator de admitanţă. Se constată că aceşti operatori sunt liniari doar în cazul condiţiilor iniţiale nule.

Caracterizarea elementului prin operatorul diferenţial corespunde excitaţiei improprii şi maschează condiţia iniţială, care este specifică elementului.

În concluzie două bobine liniare ideale sunt echivalente, dacă au operatori de admitanţă identici, ceea ce impune ca inductivităţile lor să fie egale dar şi curenţii iniţiali să fie egali.

Condensatorul liniar ideal poate fi excitat propriu în curent (fig. 5):

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{L}\int_0^t i(t')dt',$$

sau impropriu în tensiune (fig. 5):

$$i(t) = C\frac{du}{dt}.$$

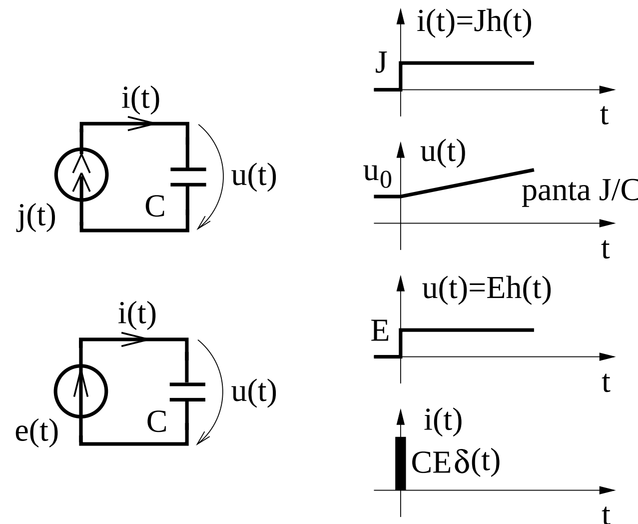


Fig. 4.5.

Pentru caracterizarea relaţiei tensiune - curent se pot folosi:

– operatorul de impedanţă:

$$z\cdot = u_0 + \frac{1}{C}\int_0^t \cdot dt';$$

– operatorul de admitanţă:

$$y\cdot = C\frac{d\cdot}{dt};$$

Condiţia ca două condensatoare să fie echivalente este ca operatorii lor de echivalenţă să fie identici, ceea ce impune ca cele două capacităţi să fie egale dar şi tensiunile iniţiale să fie egale.

Pentru verificarea experimentală a echivalenţei între două condensatoare ideale liniare sunt suficiente două măsurători ale tensiunii la borne $u(t)$, la două momente diferite de timp, în condiţiile excitării condensatorului cu surse de curent treaptă unitară (fig. 5).

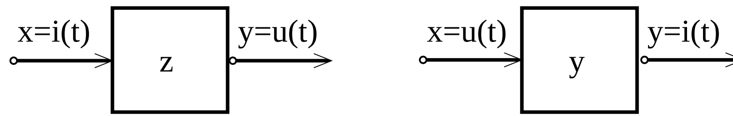


Fig. 4.6.

Echivalenţa între două circuite impune ca operatorii z şi y să fie inversabili. În cazul degenerat al sursei ideale de tensiune, la care $z = 0$ nu se poate aplica această teoremă de echivalenţă. Deasemenea nici sursa ideală de curent ($y = 0$) nu poate fi echivalentă cu o sursă de tensiune.

În cazul particular al circuitelor rezistive (fig. 7), la care $z = R$ şi $y = G$, aceste relaţii capătă forma: $R = 1/G$, $e = Rj$.

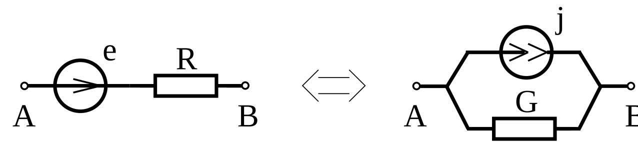


Fig. 4.7.

Dacă elementul dipolar de circuit este o bobină liniară ideală (fig. 8) $z = L\,du/dt$ şi în consecinţă $e = L\,dj/dt$.

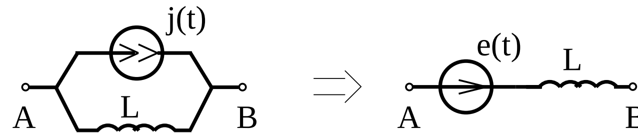


Fig. 4.8.

Conform teoremei condiţiei iniţiale, orice bobină cu curentul iniţial $i(0)$, admite o schemă echivalentă de tip sursă reală de curent, în care $j = i_0 = ct$.

În consecinţă, ea admite şi o schemă echivalentă de tip sursă reală de tensiune la care $e = L\,di_0/dt = L\,i_0\delta(t)$, ca în figura 9.

Dacă elementul dipolar de circuit este un condensator ideal (fig. 10), $y = C\,du/dt$ şi în consecinţă $j = C\,de/dt$.

Un condensator cu condiţie iniţială nenulă $u(0) = u_0$ va admite circuitul echivalent din figura 11, în care $j = C\,du_0/dt = C\,u_0\delta(t)$.

Operatorii de impedanţă şi admitanţă:

$$u = z \cdot i,\ i = y \cdot u,$$

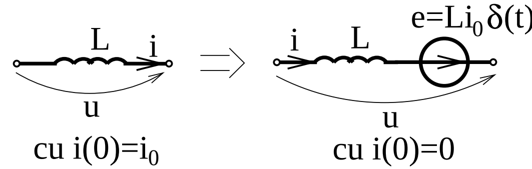


Fig. 4.9.

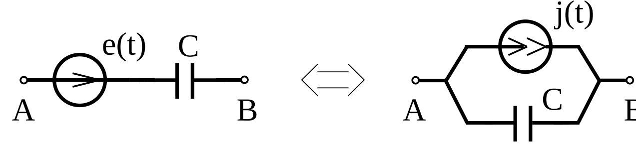


Fig. 4.10.

pot fi utilizaţi pentru caracterizarea oricărui element de circuit rezistiv sau reactiv liniar sau neliniar. De exemplu, în cazul rezistoarelor liniare:

$$z\cdot = R\cdot,\ y\cdot = G\cdot,$$

aceştia sunt operatori liniari, cu caracter alegebric.

În cazul elementelor multipolare liniare, operatorii de impedanţă şi cei de admitanţă au un caracter matriceal.

Conform definiţiilor anterioare, de câte ori operatorii z sau y sunt inversabili ei satisfac relaţiile:

$$z = y^{-1},\ y = z^{-1}.$$

Condiţia ca două elemente de circuit să fie echivalente este ca acestea să aibă operatori de admitanţă şi impedanţă identici.

4.2 Teorema generatoarelor echivalente

Considerând o sursă reală de tensiune (fig. 12) formată dintr-o t.e.m. $e(t)$ înseriată cu un element dipolar de circuit cu operatorul de impedanţă liniar z, tensiunea la borne satisface relaţia:

$$u = zi - e.$$

Presupunând operatorul z inversabil rezultă:

$$i = z^{-1}(u + e) = yu + j,$$

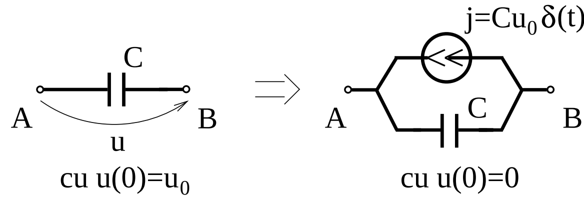


Fig. 4.11.

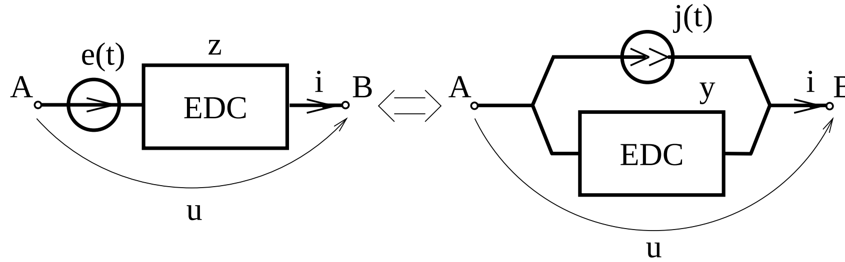


Fig. 4.12.

în care s-a notat cu $y = z^{-1}$ şi $j = z^{-1}e = ye$. Se constată că aceasta este ecuaţia unei surse reale de curent, formată dintr-o sursă ideală cu c.e.m. j conectată în paralel cu elementul dipolar de circuit EDC.

În consecinţă, orice sursă reală de tensiune cu impedanţa internă nenulă este echivalentă cu o sursă reală de curent. Transfigurarea unei surse reale de curent într-una de tensiune se poate face, dacă:

$$z = y^{-1},\ e = zj,$$

iar transfigurarea unei surse de tensiune într-o sursă de curent, dacă

$$y = z^{-1},\ j = ye.$$

4.3 Conexiunea serie a elementelor dipolare

Două elemente dipolare de circuit conectate în serie sunt parcurse de acelaşi curent (fig. 13):

$$i = i_1 = i_2,$$

în schimb tensiunile la borne satisfac relaţia:

$$u = u_1 + u_2.$$

Considerând că cele două elemente sunt caracterizate prin operatorii de impedanţă:

$$u_1 = z_1 i_1,\ u_2 + z_2 i_2,$$

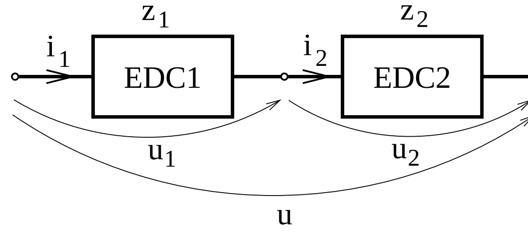


Fig. 4.13.

dacă z_1 şi z_2 au acelaşi domeniu, rezultă că $u = u_1 + u_2 = z_1 i + z_2 i = (z_1 + z_2)i = 2zi$.

Deci cele două elemente dipolare de circuit conectate în serie sunt echivalente cu un element având operatorul de impedanţă $z = z_1 + z_2$.

În general, în cazul a n elemente de circuit conectate în serie având impedanţele z_k, $k = 1, n$, cu domeniu comun, impedanţa echivalentă este:

$$z = \sum_{k=1}^{n} z_k,$$

deoarece în acest caz $i_k = i$ şi

$$u = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} z_k i_k = \left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) \cdot i = zi.$$

Deoarece adunarea este comutativă rezultă că nu are importanţă ordinea în care elementele dipolare sunt conectate în serie.

Prezintă interes următoarele cazuri particulare:

a. Conexiunea serie a rezistoarelor liniare (fig. 14). Deoarece în acest caz operatorii de impedanţă $z_k = R_k$, rezultă că:

$$R = \sum_{n=1}^{n} R_k,$$

deci că rezistenţa echivalentă este suma rezistenţelor conectate în serie.

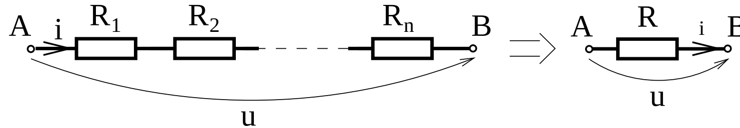


Fig. 4.14.

b. Conexiunea serie a bobinelor liniare (fig. 15).

Pentru a putea fi sumaţi operatorii de impedanţă $z_k = L\,d/dt$ trebuie să aibă acelaşi domeniu, respectiv să aibă aceeaşi condiţie iniţială $i_k(0) = i_0$. În acest caz:

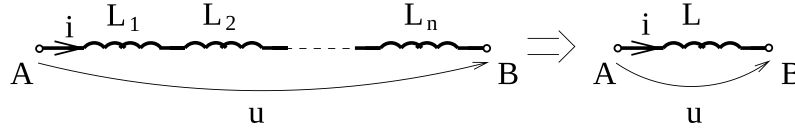


Fig. 4.15.

$$u = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} L_k \frac{di}{dt} = L\frac{di}{dt}\,,$$

în care:

$$L = \sum_{k=1}^{n} L_k,$$

inductivitatea echivalentă fiind suma inductivităţiilor conectate în serie.

Dacă se înseriază bobine cu condiţii iniţiale diferite se obţine un circuit incorect formulat.

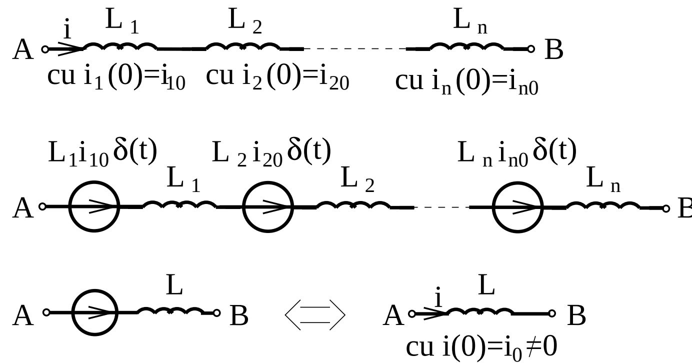


Fig. 4.16.

Formarea unui circuit prin înserierea unor bobine, care au iniţial curenţi diferiţi poate fi totuşi studiată folosind teoremele de echivalenţă pentru bobine cu condiţii iniţiale nenule (fig. 16). Tensiunea la bornele AB este:

$$u = \sum_{k=1}^{n} u_k = -\sum_{k=1}^{n} i_k i_{k0}\delta(t) + \sum_{k=1}^{n} L_k \frac{di}{dt} = -L i_0 \delta(t) + L\frac{di}{dt}$$

în care s-a notat cu:

$$L = \sum_{k=1}^{n} L_k \text{ şi } i_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n} L_k i_{k0}}{\sum_{k=1}^{n} L_k}.$$

Rezultă că cele n bobine pot fi înlocuite cu o singură bobină având curentul iniţial egal cu media ponderată a curenţilor iniţiali (cu ponderi egal'e cu inductivităţile).

Acest model prezintă dificultăţi legate de faptul că tensiunile la bornele fiecărei bobine sunt nemărginite la momentul iniţial.

c. Conexiunea serie a condensatoarelor (fig. 17).

În acest caz:

$$u = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k} \int_0^t i(t')dt' = u_0 + \frac{1}{C_k} \int_0^t i(t')dt',$$

dacă:

$$u_0 = \sum_{k=1}^{n} u_k(0) \quad \text{şi} \quad \frac{1}{C} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}.$$

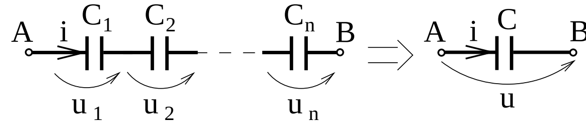


Fig. 4.17.

În consecinţă, n condensatoare conectate serie sunt echivalente cu un singur condensator la care capacitatea reciprocă $S = 1/C$

$$S\cdot = \sum_{k=1}^{n} S_k,$$

este suma capacităţilor reciproce ($S_k = 1/C_k$) ale condensatoarelor înseriate şi având o tensiune iniţială u_0, egală cu suma tensiunilor iniţiale ale condensatoarelor înseriate.

d. Conexiunea serie a surselor ideale de tensiune (fig. 18).

În acest caz:

$$u = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} e_k,$$

în consecinţă, aceste surse sunt echivalente cu o singură sursă având tensiunea electromotoare:

$$e = \sum_{k=1}^{n} e_k.$$

Această sursă are un caracter algebric, pentru a permite cazul în care sursele de tensiune nu au aceeaşi orientare.

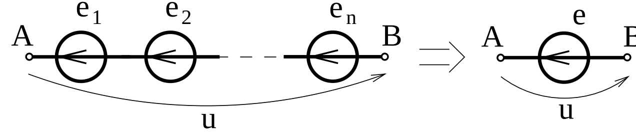


Fig. 4.18.

e. Conexiunea serie a surselor ideale de curent (fig. 19).

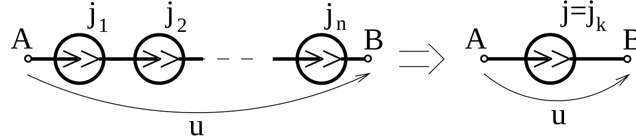


Fig. 4.19.

Deoarece conexiunea serie a elementelor dipolare de circuit impune aceeaşi valoare a curentului prin toate elementele conectate iar în cazul surselor ideale de curent $i_k = j_k$, rezultă că pentru a evita incompatibilităţile este necesar ca toţi curenţii electromotori să aibă aceeaşi valoare $j_k = i$.

Rezultă că două surse ideale de curent cu c.e.m. diferiţi nu pot fi conectate în serie.

f. Conexiunea serie a rezistoarelor neliniare (fig. 20).

Considerând n rezistoare neliniare comandate în curent şi conectate în serie:

$$u = \sum_{k=1}^{n} i_k = \sum_{k=1}^{n} f_k(i) = f(i).$$

Rezultă că acestea sunt echivalente cu un rezistor neliniar având caracteristica $f = \sum_{k=1}^{n} f_k$.

Se constată că elementul echivalent are o caracteristică f, care se poate obţine prin însumarea pe verticală a caracteristicilor din planul $i - u$ sau suma pe orizontală a caracteristicilor din planul $u - i$.

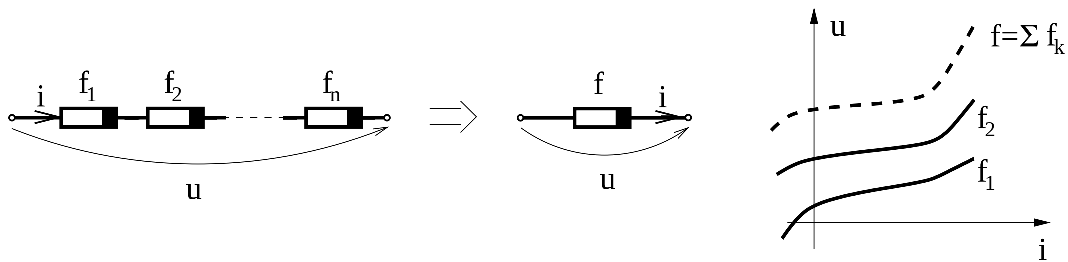


Fig. 4.20.

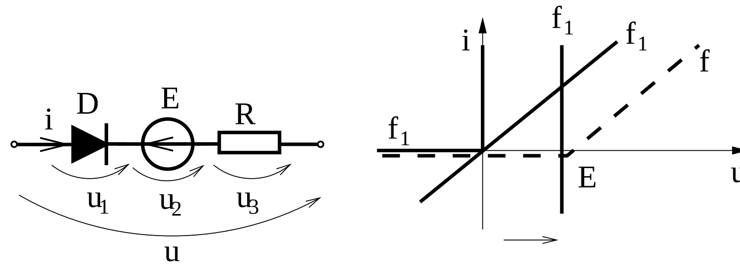


Fig. 4.21.

În figura 21 se prezintă modul în care se poate obţine pe cale grafică funcţia caracteristică elementului obţinut prin conexiunea serie a unei diode perfecte D, o sursă ideală de tensiune E şi un rezistor R.

Conectarea în serie a unui element dipolar de circuit EDC $u = zi$ cu o sursă ideală de tensiune E (fig. 22) are ca efect translatarea caracteristicii în direcţia axei tensiunii $u' = u + E = zi + E$.

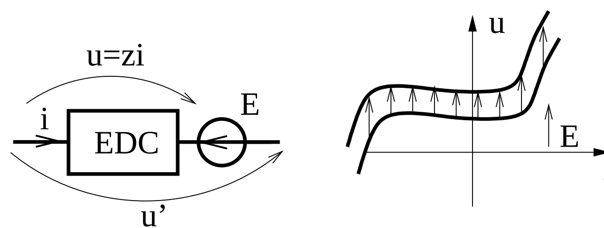


Fig. 4.22.

g. Conexiunea serie a surselor de tensiune (fig. 23).

Se consideră n surse reale de tensiune cu t.e.m. e_k şi operatorul de impedanţă

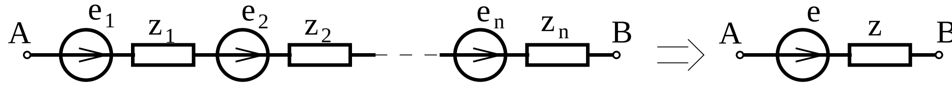


Fig. 4.23.

z_k, $k = 1, n$. Tensiunea la bornele AB:

$$u = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} e_k + \sum_{k=1}^{n} z_k i = -e + zi,$$

în care s-a notat:

$$e = \sum_{k=1}^{n} e_k, \; z = \sum_{k=1}^{n} z_k.$$

În consecinţă, cele n surse reale de tensiune sunt echivalente cu o singură sursă la care t.e.m. este suma algebrică a t.e.m. e_k şi impedanţă z egală cu suma impedanţelor z_k.

În particular, în cazul surselor rezistive $z_k = R_k$ şi $z = R = \sum_{k=1}^{n} R_k$.

h. Conexiunea serie a surselor reale de curent (fig. 24)

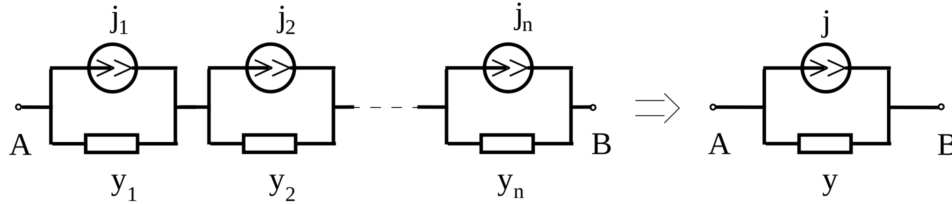


Fig. 4.24.

Tranfigurând sursele de curent în surse de tensiune se obţin:

$$z_k = y_k^{-1}, \; e_k = z_k j_k,$$

şi conform teoremei anterioare:

$$z = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} y_k^{-1}, \; e = \sum_{k=1}^{n} e_k = \sum_{k=1}^{n} z_k j_k.$$

Rezultă parametrii $y = z^{-1}$ şi $j = z^{-1}e$ ale sursei reale de curent echivalente:

$$y = \left[\sum_{k=1}^{n} y_k^{-1}\right]^{-1}, \quad j = y\left[\sum_{k=1}^{n} y_k^{-1} j_k\right].$$

În particular, în cazul surselor de curent rezistive, rezultă:

$$R = \sum_{k=1}^{n} R_k = \frac{1}{G} \quad \text{şi} \quad j = \frac{\sum R_k j_k}{\sum R_k}.$$

Sursa de curent echivalentă are rezistenţa internă egală cu suma rezistenţelor şi c.e.m. echivalentă egală cu media c.e.m. ale surselor înseriate, cu ponderile egale cu rezistenţele interne. Dacă rezistenţele interne sunt egale, rezultă c.e.m. echivalent ca medie aritmetică a curenţilor surselor.

Pentru studiul surselor reale diferite (curent şi tensiune) conectate în serie se recomandă transfigurarea surselor reale de curent în surse reale de tensiune (fig. 25).

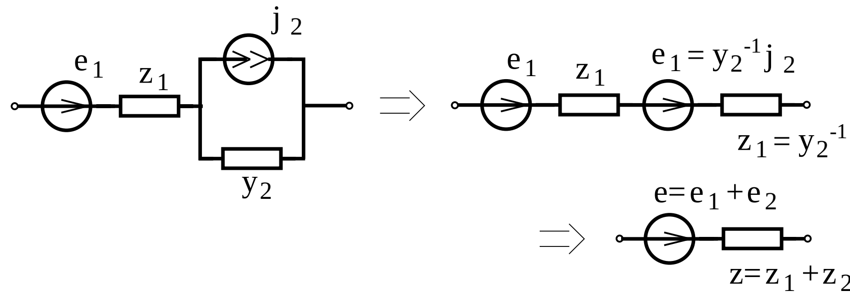


Fig. 4.25.

O teoremă de echivalenţă importantă referitoare la conexiunea serie este teorema sursei de curent. Conform acesteia, orice sursă ideală de curent, conectată în serie cu un element dipolar de circuit arbitrar (dar compatibil cu sursa ideală

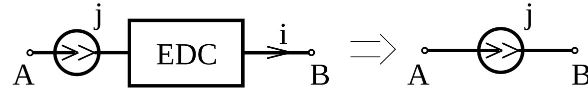


Fig. 4.26.

de curent) este echivalentă cu sursa de curent (fig. 26).

Demonstraţia acestei teoreme este banală şi se bazează pe observaţia că elementul EDC este parcurs de curentul $i = j$ independent de tensiunea la borne. În consecinţă, elementul de circuit cu bornele AB se comportă ca o sursa ideală de curent cu c.e.m. j.

Nu orice element dipolar de circuit poate fi înseriat cu o sursă ideală de curent. De exemplu, sursa ideală de curent nu poate fi înseriată cu altă sursă ideală de curent sau cu un izolator perfect (fig. 27).

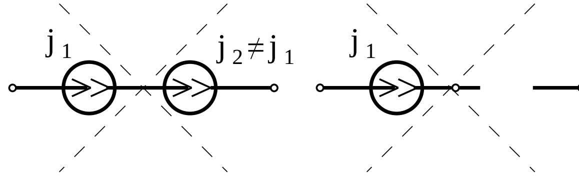


Fig. 4.27.

4.4 Conexiunea paralel a elementelor dipolare

Două elemente dipolare de circuit conectate în paralel au aceeaşi tensiune la borne (fig. 28):

$$u = u_1 = u_2,$$

iar intensităţile curenţilor satisfac relaţia:

$$i = i_1 + i_2.$$

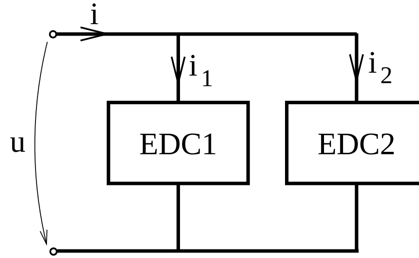


Fig. 4.28.

Considerând că cele două elemente sunt caracterizate prin operatorii de admitanţă:

$$i_1 = y_1 u_1, \quad i_2 = y_2 u_2,$$

rezultă că:

$$i = i_1 + i_2 = y_1 u + y_2 u = (y_1 + y_2)u = yu.$$

În consecinţă, cele două elemente de circuit conectate paralel sunt echivalente cu un element dipolar având operatorul de admitanţă $y = y_1 + y_2$.

În general n elemente de circuit conectate în paralel cu admitanţele y_k, $k = \overline{1, n}$ au o admitanţă echivalentă:

$$y = \sum_{k=1}^{n} y_k,$$

deoarece $u_k = u$ şi

$$i = \sum_{k=1}^{n} i_k = \sum_{k=1}^{n} y_k i_k = \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) \cdot i = yi.$$

a. Conexiunea paralel a rezistoarelor liniare (fig. 29).

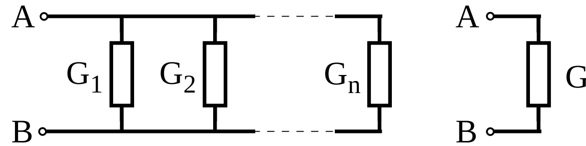


Fig. 4.29.

În cazul rezistoarelor liniare operatorii de admitanţă $y_k = G_k$, deci conductanţa echivalentă este suma conductanţelor rezistoarelor:

$$G = \sum_{k=1}^{n} G_k$$

b. Conexiunea paralel a bobinelor liniare (fig. CEVA).

4.5 Conexiunea mixtă

Dacă laturile unui circuit sunt conectate succesiv serie-paralel, atunci se spune că circuitul are conexiunea mixtă. Exemplu de conexiune mixtă a trei elemente dipolare de circuit este prezentată în figura 30.

Elementele dipolare de circuit EDC1, EDC2 sunt conectate în paralel iar elementul dipolar EDC3.

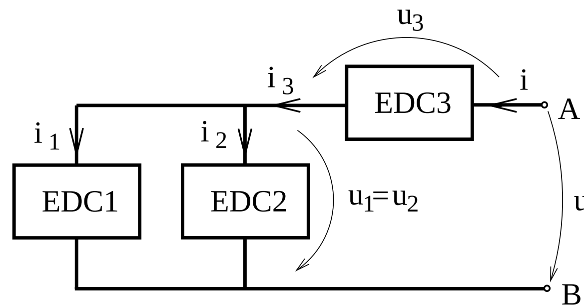


Fig. 4.30.

Presupunând cunoscuţi operatorii de admitanţă y_1, y_2 ai primelor două elemente şi operatorul de impedanţă al celui de-al treilea element, rezultă:

$$i = i_1 + i_2 = y_1 u_1 + y_2 u_2 = (y_1 + y_2)u_1 = y_{12}u_1;$$

$$u = u_1 + u_3 = z_{12}i_3 + z_3 i_3 = (z_{12} + z_3)i_3 = zi,$$

în care s-a notat cu:

$$z_{12} = y_{12}^{-1}, \quad z = z_{12} + z_3.$$

În consecinţă operatorul de impedanţă echivalent este:

$$z = (y_1 + y_2)^{-1} + z_3.$$

În cazul particular, în care cele trei elemente sunt rezistoare liniare rezultă rezistenţa echivalentă:

$$R = R_3 + \frac{1}{G_1 + G_2} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

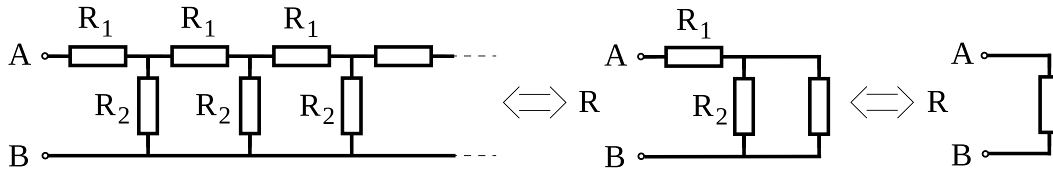


Fig. 4.31.

Un exemplu de circuit cu o infinitate de elemente conectate mixt îl reprezintă circuitul din figura 31. Faţă de bornele AB acesta se comportă ca un rezistor liniar cu rezistenţa echivalentă R. Pentru determinarea acestei rezistenţe se observă că eliminând primul tronson R_1, R_2 circuitul rămas este tot infinit şi are aceeaşi rezistenţă echivalentă R, în consecinţă la bornele de ieşire ale primului tronson cuadripol se poate presupune rezistenţa R astfel încât:

$$R = R_1 + \frac{R_2 R}{R_2 R}.$$

Din această ecuaţie, rezultă:

$$(R - R_1)(R_2 + R) - R_2 R = 0,$$

deci R este soluţia ecuaţiei de gradul doi:

$$R^2 - R_1 R - R_1 R_2 = 0,$$

şi are una din valorile:

$$R_{a,b} = \frac{R_1 \pm \sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2}}{2}.$$

Deoarece soluţia corectă $R > R_1$, se adoptă:

$$R = \frac{R_1}{2}\left[1 + \sqrt{1 + 4\frac{R_2}{R_1}}\right].$$

Un al doilea mod în care trei elemente dipolare de circuit se pot conecta mixt este prezentat în figura 32. EDC1 şi EDC2 sunt conectate serie iar elementul dipolar obţinut este în paralel cu EDC3, în acest caz admitanţa echivalentă $y = y_3 + (z_1 + z_2)^{-1}$.

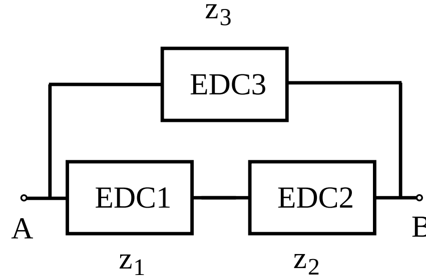


Fig. 4.32.

Un circuit dipolar obţinut prin conexiunea mixtă este cel din figura 33.a:

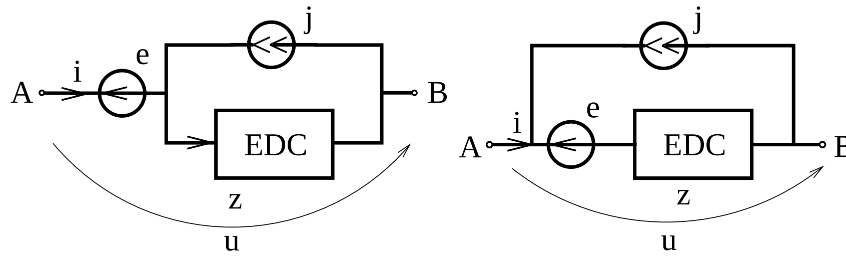


Fig. 4.33.

Tensiunea între bornele A şi B este:

$$u = e + z(i + j),$$

se constată că aceasta este şi relaţia caracteristică elementului din figura 33.b, deci cele două elemente sunt echivalente.

Acest circuit este important deoarece prin particularizări el poate degenera într-o sursă reală de curent ($e = 0$), sursă reală de tensiune ($j = 0$), sursă ideală de tensiune ($j = 0$, $z = 0$) şi respectivă sursă ideală de curent ($e = 0$, $y = 0$).

4.6 Conexiunile stea, triunghi, poligon complet

Conexiunea stea. Trei elemente de circuit sunt conectate în stea, dacă au o bornă pusă în comun (fig. 34). Alegând borna (3) ca nod de referinţă, ecuaţiile acestui element tripolar de circuit au forma:

$$V_1 = z_1 i_1 + z_3(-i_1 - i_2),$$

$$V_2 = z_2 i_2 + z_3(-i_1 - i_2).$$

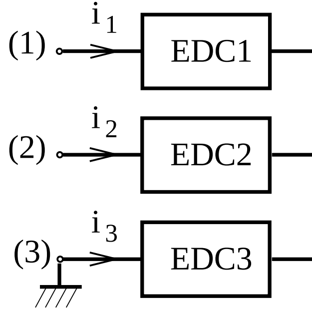


Fig. 4.34.

Acest tip de conexiune poate fi generalizat, considerând n elemente dipolare considerate la un nod. Circuitul astfel obţinut se numeşte stea multiplă cu n laturi şi este un element n-polar de circuit cu ecuţiile:

$$V_k = z_k i_k + z_n \left(-\sum_{j=1}^{n-1} i_j \right), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Conexiunea triughi. Dacă trei elemente dipolare de circuit sunt conectate ca în figura 35, având două câte două o bornă pusă în comun se spune că cele trei elemente sunt conectate în triunghi.

Notând cu y_{12}, y_{23}, y_{31} operatorii de admitanţă pentru care cele trei elemente dipolare, rezultă următoarele relaţii specifice conexiunii triunghi:

$$i_1 = i_{12} - i_{31} = y_{12}(V_1 - V_2) - y_{31}(V_3 - V_1),$$

$$i_2 = i_{23} - i_{12} = y_{23}(V_2 - V_3) - y_{12}(V_1 - V_2),$$

$$i_3 = i_{31} - i_{23} = y_{31}(V_3 - V_1) - y_{23}(V_2 - V_3).$$

Generalizând acest tip de conexiune se obţine conexiunea **poligon complet** (figura 36). în care fiecare pereche de noduri k, j cu $k = \overline{1, n}$ este conectată printr-un element dipolar de circuit. Acest circuit conţine $n(n-1)/2$ laturi.

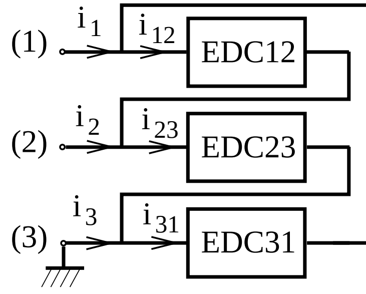


Fig. 4.35.

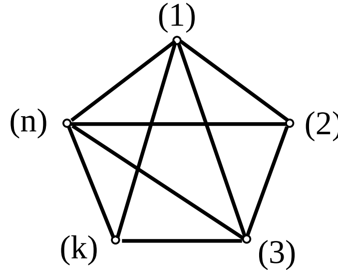


Fig. 4.36.

Notând cu y_{kj} operatorul de admitanţă specifică elementului dipolar care uneşte nodurile k şi j se obţin ecuaţiile:

$$i_k = \sum_{j=1\, j\neq k}^{n} i_{kj} = \sum_{j=1\, j\neq k}^{n} y_{kj}(V_k - V_j).$$

Teorema transfigurării stea - triunghi

Orice stea cu n laturi, elemente dipolare de circuit, caracterizate de operatorul de admitanţă liniar y_k, $k = \overline{1,n}$ este echivalentă cu un poligon complet cu n vârfuri având operatori de admitanţă:

$$y_{kj} = y_k \left(\sum_{l=1}^{n} y_l \right)^{-1} y_j.$$

Pentru a demonstra această teorema se aplică pentru circuitul stea prima teorema Kirchhoff:

$$0 = \sum_{l=1}^{n} i_l = \sum_{l=1}^{n} y_l(V_l - V_0) = \sum_{l=1}^{n} y_l V_l - \left(\sum_{l=1}^{n} y_l \right) V_0,$$

din care rezultă potenţialul nodului central al sferei:

$$V_0 = \left(\sum_{l=1}^{n} y_l\right)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j V_j.$$

În consecinţă curenţii din laturi sunt:

$$i_k = y_k(V_k - V_0) = y_k V_k - y_k \left(\sum_{l=1}^{n} y_l\right)^{-1} \sum_{j=1}^{n} y_j V_j = y_k V_k - \sum_{j=1}^{n} y_k \left(\sum_{l=1}^{n} y_l\right)^{-1} y_j V_j.$$

Prezintă interes următoarele cazuri particulare:

- circuit stea cu rezistoare liniare, este echivalent cu un poligon complet, la care:

$$G_{kj} = \frac{G_k \cdot G_j}{\sum_{l=1}^{n} G_l},$$

- circuitul stea cu bobine liniare având condiţii iniţiale nule, este echivalent cu un poligon complet, la care:

$$\Gamma_{kj} = \frac{\Gamma_k \cdot \Gamma_j}{\sum_{l=1}^{n} G_l},$$

- circuitul stea cu condensatoare liniare având condiţii iniţiale nule este echivalent cu un poligon complet, la care:

$$C_{kj} = \frac{C_k \cdot C_j}{\sum_{l=1}^{n} C_l}.$$

În cazul circuitului stea cu $n = 3$ laturi, rezultă parametrii triunghiului echivalent:

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \Rightarrow R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3},$$
$$G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \Rightarrow R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1},$$
$$G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3} \Rightarrow R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}.$$

Aceste relaţii ca şi cele similare pentru inductivităţile L_{kj} şi capacităţile reciproce S_{kj}, permit transfigurarea stea - triunghi.

Teorema transfigurării stea - triunghi

Un circuit triunghi cu laturile având operatori de admitanţă liniari $y_{12} = z_{12}^{-1}$, $y_{23} = z_{23}^{-1}$, $y_{31} = z_{31}^{-1}$ este echivalent cu un circuit stea cu impedanţele (figura 37):

$$z_1 = \frac{1}{2}[(z_{23} + z_{12})^{-1} + y_{31}]^{-1} + \frac{1}{2}[(z_{31} + z_{23})^{-1} + y_{12}]^{-1} - \frac{1}{2}[(z_{12} + z_{31})^{-1} + y_{23}]^{-1},$$

$$z_2 = \frac{1}{2}[(z_{21} + z_{23})^{-1} + y_{12}]^{-1} + \frac{1}{2}[(z_{12} + z_{31})^{-1} + y_{23}]^{-1} - \frac{1}{2}[(z_{23} + z_{12})^{-1} + y_{21}]^{-1},$$

$$z_3 = \frac{1}{2}[(z_{12} + z_{31})^{-1} + y_{23}]^{-1} + \frac{1}{2}[(z_{23} + z_{12})^{-1} + y_{31}]^{-1} - \frac{1}{2}[(z_{31} + z_{23})^{-1} + y_{12}]^{-1}.$$

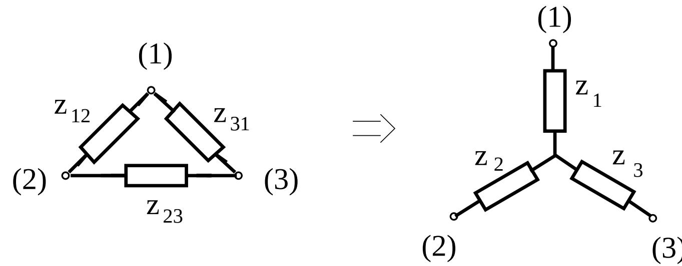


Fig. 4.37.

Pentru demonstraţia acestei teoreme se excită cele două circuite în curent între perechile de borne 1 - 2, 2 - 3, 3 - 1, succesiv, obţinându-se:

$$1\ -\ 2\ :\ z_1 + z_2 = [(z_{31} + z_{23})^{-1} + y_{12}]^{-1},$$

deoarece laturile z_1 şi z_2 sunt înseriate, iar z_{31}, z_{23}, z_{12} sunt conectate mixt (z_{23} - z_{31} serie, iar rezultatul în paralel cu z_{12});

$$2\ -\ 3\ :\ z_2 + z_3 = [(z_{12} + z_{31})^{-1} + y_{23}]^{-1},$$

$$3\ -\ 1\ :\ z_1 + z_3 = [(z_{12} + z_{23})^{-1} + y_{31}]^{-1}.$$

Adunând aceste trei relaţii se obţine mărimea $2 \cdot (z_1 + z_2 + z_3)$, care scăzută din dublul fiecărei relaţii permite obţinerea rezultatelor dorite.

Transfigurarea unui polinom complet cu n noduri şi $s = n(n-1)/2$ laturi într-o stea cu n laturi presupune rezolvarea a s ecuatii cu n necunoscute. Această problemă are soluţie doar dacă:

$$\frac{n(n-1)}{2} = n,$$

deci pentru $n = 3$. În consecinţă singurul poligon complet care se poate transfigura în stea este triunghiul. Aplicând teorema transfigurării triunghi - stea în cazul circuitelor rezistive liniare se obţin relaţiile:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}},\ R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}},\ R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}.$$

În cazul circuitelor cu bobine ideale liniare, relaţiile de transfigurare sunt:

$$L_1 = \frac{L_{12}L_{31}}{L_{12}+L_{23}+L_{31}},\ L_2 = \frac{L_{12}L_{23}}{L_{12}+L_{23}+L_{31}},\ L_3 = \frac{L_{23}L_{31}}{L_{12}+L_{23}+L_{31}}.$$

iar în cazul condensatoarelor:

$$C_1 = \frac{1}{S_1} = \frac{C_{12}C_{23}+C_{23}C_{31}+C_{31}C_{12}}{C_{23}},$$

$$C_2 = \frac{1}{S_2} = \frac{C_{12}C_{23}+C_{23}C_{31}+C_{31}C_{12}}{C_{31}},$$

$$C_3 = \frac{1}{S_3} = \frac{C_{12}C_{23}+C_{23}C_{31}+C_{31}C_{12}}{C_{12}}.$$

Următoarele teoreme se referă la echivalenţa circuitelor alcătuite din surse ideale.

Teorema lui Vachy pentru surse de tensiune

Un circuit stea alcătuit din surse ideale de tensiune cu t.e.m identice şi orientate similar faţă de nodul central este echivalent cu o stea cu laturi conductoare perfecte (figura 38):

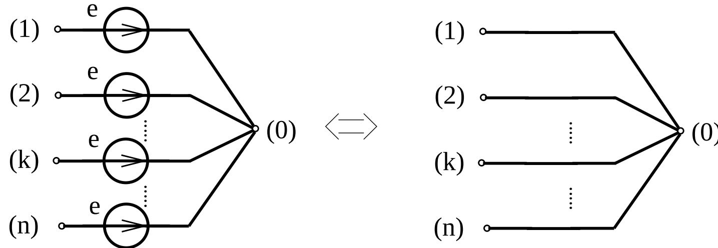


Fig. 4.38.

Pentru demonstraţia acestei afirmaţii se constaţă că tensiunea dintre două noduri arbitrare $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ este nulă:

$$u_{kj} = u_{k0} - u_{0j} = -e + e = 0.$$

Rezultă că toate cele n noduri sunt echipotenţiale:

$$V_1 = V_2 = \cdots = V_k = \cdots = V_n,$$

ceea ce corespunde cazului în care cele n surse sunt unite printr-un conductor perfect.

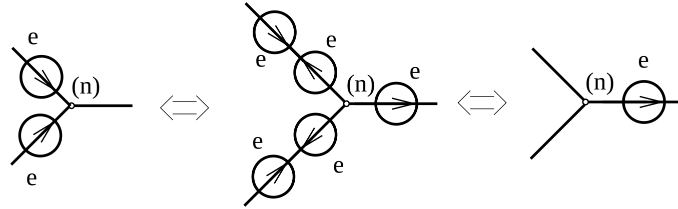


Fig. 4.39.

O consecinţă a acestei teoreme, cunoscută sub numele de "alunecarea surselor", este reprezentată în figura (39). Se constată că cele două surse de tensiune, care concură la nodul (n), pot fi eliminate şi înlocuite cu o singură sursă plasată pe a treia latură.

Teorema lui Vachy pentru surse de curent

Un circuit format din surse ideale de curent identice conectate în buclă şi orientate în acelaşi sens este echivalent cu un circuit format din izolatoare perfecte (figura 40).

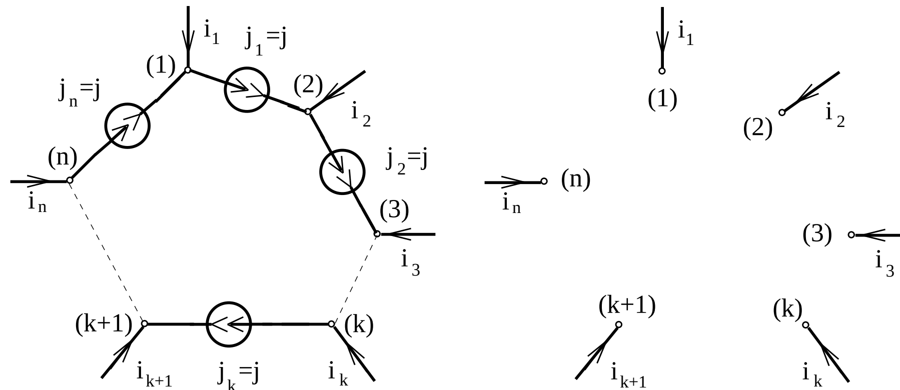


Fig. 4.40.

Intensităţile curenţilor din cele n borne ale circuitului sunt toate nule, deoarece:

$$i_k = j_k - j_{k-1} = j - j = 0,\ k = \overline{2, n},$$

şi

$$i_1 = j_1 - j_n = 0.$$

În consecinţă, indiferent ce valori au potenţialele bornelor $i_k = 0$, $k = \overline{1, n}$, deci circuitul are acelaşi comportare ca un izolator.

De exemplu, aplicând acestă teoremă la circuitul din figura 41, se obţine în

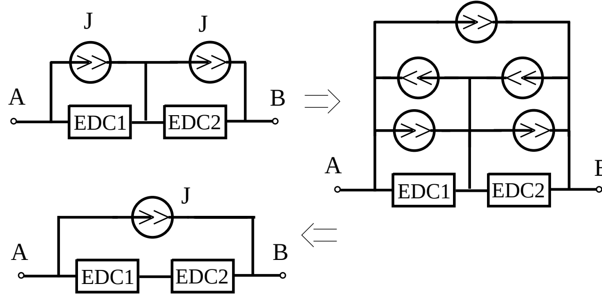


Fig. 4.41.

final un circuit cu o singură sursă de curent, dar cu o comportare pe la borne similară circuitului initial.

4.7 Teoreme de echivalare pentru bobine cuplate

Teorema eliminării cuplajului

Două bobine cuplate care au o bornă comună (figura 42) sunt echivalente cu o stea cu inductivităţile necuplate:

$$L_A = L_1 - M, \; L_B = L_2 - M, \; L_C = M.$$

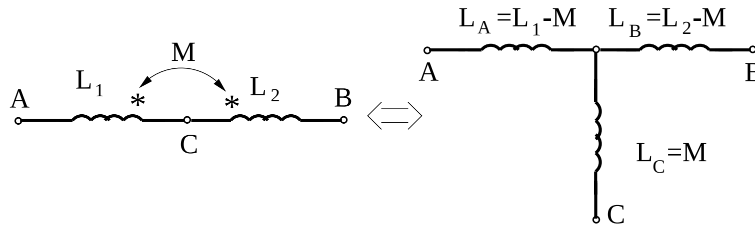


Fig. 4.42.

Aceste relaţii se aplică în cazul în care bornele polarizate au aceaşi poziţie faţă de borna comună. În caz contrar, trebuie schimbat semnul inductivităţii mutuale în cele trei relaţii.

Pentru demonstrarea acestei teoreme se consideră că cele două bobine sunt parcurse de curenţii i_1, i_2 (figura 43) şi în consecinţă:

$$u_{AC} = z_1 i_1 + z_M i_2,\ u_{BC} = z_2 i_2 + z_M i_1,$$

în care s-a notat $z_1 = L_1 \frac{d}{dt}$, $z_2 = L_2 \frac{d}{dt}$ şi $z_M = M \frac{d}{dt}$. În circuitul echivalent:

$$u_{AC} = z_A i_1 + z_C(i_1 + i_2) - (z_A + z_C) i_1 + z_C i_2,$$

$$u_{BC} = z_B i_2 + z_C(i_1 + i_2) - (z_B + z_C) i_2 + z_C i_1,$$

unde $z_A = L_A \frac{d}{dt}$, $z_B = L_B \frac{d}{dt}$, $z_C = L_C \frac{d}{dt}$.

Condiţia ca cele două circuite tripolare să aibă aceeaşi comportare pe la borne este ca cele două relaţii să fie identice, respectiv $z_A + z_C = z_1$, $z_B + z_C = z_2$ şi $M = L_C$, $L_1 = L_A + M$ şi $L_2 = L_B + M$.

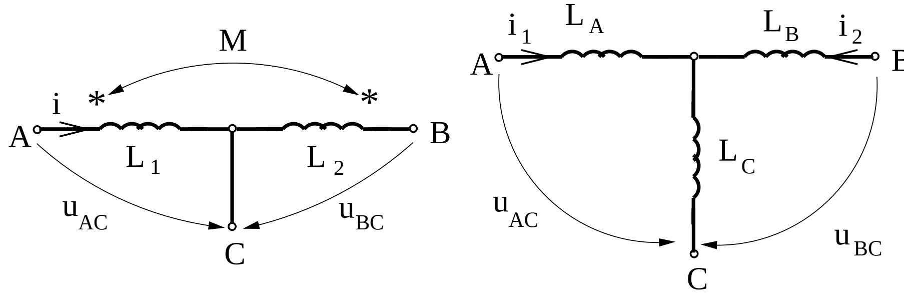


Fig. 4.43.

Rezultatul obţinut poate fi generalizat în cazul unui circuit stea cu trei laturi cuplate magnetic (figura 44).

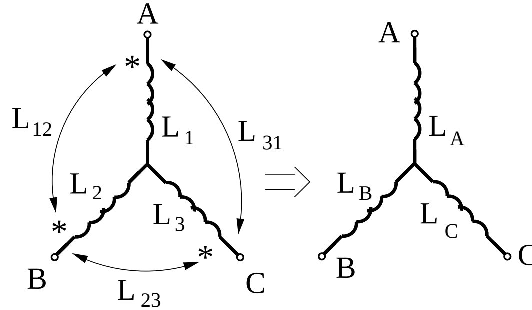


Fig. 4.44.

Prin eliminarea succesivă a celor trei cuplaje L_{12}, L_{23} şi L_{31} se obţin relaţiile de echivalenţă:

$$L_A = L_1 - L_{12} + L_{23} - L_{31},$$

$$L_B = L_2 - L_{12} - L_{23} + L_{31},$$

$$L_C = L_3 + L_{12} + L_{23} - L_{31}.$$

Aplicând teorema eliminării cuplajului în cazul unei perechi de bobine cuplate şi înseriate (figura 45 şi figura 46) se obţine:

$$L_e = L_1 + L_2 \pm 2M,$$

în care semnul se stabileşte în funcţie de poziţia bobinei polarizate.

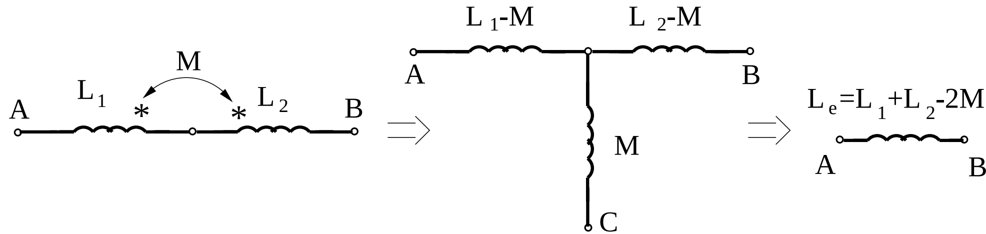


Fig. 4.45.

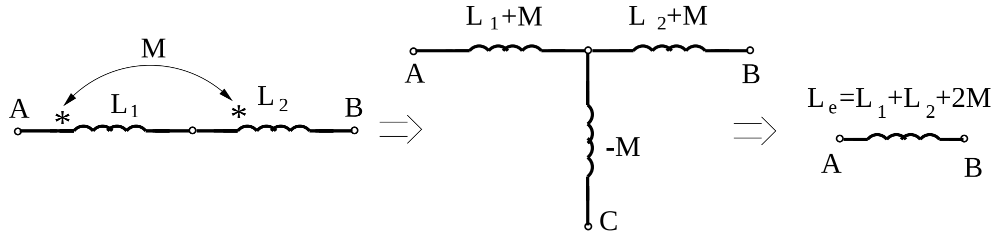


Fig. 4.46.

Acest rezultat poate fi generalizat la cazul a n bobine cuplate magnetic şi înseriate (figura 47) cu condiţii iniţiale nule.

Presupunând ca toate bornele polarizate sunt orientate similar tensiunea u_{AB} la borne are expresia:

$$u_{AB} = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L_{kj}\frac{di_k}{dt} = \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L_{kj}\right)\frac{di}{dt} = L_e\frac{di}{dt}.$$

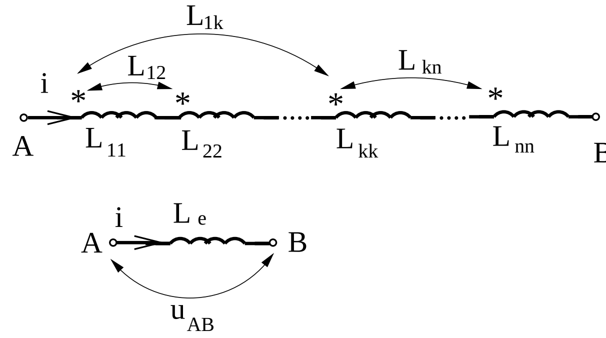


Fig. 4.47.

În consecinţă aceste bobine sunt echivalente cu o singură bobină având inductivitatea echivalentă:

$$L_e = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} L_{kj}.$$

Considerând două bobine cuplate magnetic şi conectate în paralel (figura 48), prin eliminarea cuplajului se obţine:

$$L_e = M + \frac{(L_1 - M)(L_2 - M)}{L_1 + L_2 - 2M} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}.$$

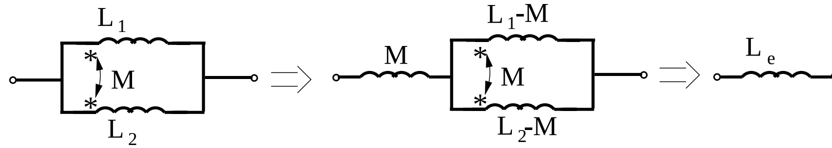


Fig. 4.48.

Daca bornele polarizate au poziţii opuse expresia inductivităţii echivalente $L_e = (L_1 L_2 - M^2)/(L_1 + L_2 + 2M)$ se obţine prin schimbarea semnului inductivităţii mutuale M.

Pentru a studia cazul a n bobine cuplate şi conectate în paralel se consideră matricea inductivităţilor reciproce $\Gamma = L^{-1}$. Curentul total absorbit de circuit este:

$$i = \sum_{k=1}^{n} i_k = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{kj} \int_0^t u(t')dt' = \Gamma_e \int_0^t u(t')dt',$$

sau folosind operatorii de admitanţă:

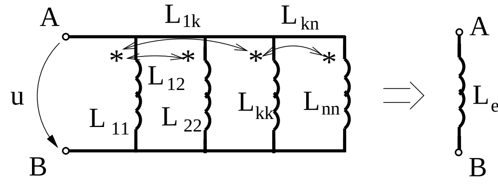


Fig. 4.49.

$$i = \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_{kj} \right) u.$$

Intensitatea laturii k este:

$$i_k^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{kj} \int_0^t u(t')dt'.$$

În consecinţă, cele n bobine conectate în paralel sunt echivalente cu o singură bobina având inductivitatea reciprocă echivalenta:

$$\Gamma_e = \frac{1}{L_e} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{kj},$$

iar în cazul general al bobinelor liniare cuplate, operatorul de admitanţă echivalent este:

$$y_e = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_{kj}.$$

Eliminarea cuplajelor în conexiunea triunghi

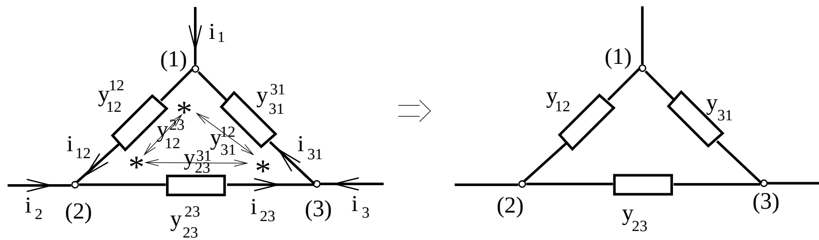


Fig. 4.50.

Se consideră trei laturi conectate în triunghi caracterizate prin operatorii de admitanţă proprii y_{12}^{12}, y_{23}^{23}, y_{31}^{31}, cuplate magnetic. Cuplajul este caracterizat prin operatorii de admitanţă y_{12}^{23}, y_{23}^{31}, y_{31}^{12}, astfel încât:

$$i_{12} = y_{12}^{12}u_{12} + y_{12}^{23}u_{23} + y_{12}^{31}u_{31},$$
$$i_{23} = y_{23}^{12}u_{12} + y_{23}^{23}u_{23} + y_{23}^{31}u_{31},$$
$$i_{31} = y_{31}^{12}u_{12} + y_{31}^{23}u_{23} + y_{31}^{31}u_{31}.$$

Deoarece $u_{23} = -u_{12} - u_{31}$, rezultă:

$$i_{12} = (y_{12}^{12} - y_{13}^{23})u_{12} + (y_{13}^{31} - y_{12}^{23})u_{31},$$

şi în mod similar i_{31}. În consecinţă:

$$i_1 = i_{12} - i_{31} = (y_{12}^{12} - y_{12}^{23} - y_{12}^{31} + y_{23}^{31})u_{12} - (y_{31}^{31} - y_{31}^{12} - y_{31}^{23} + y_{12}^{23})u_{31},$$

şi prin identificare cu expresia curentului din circuitul triunghi cu laturile necuplate:

$$i_1 = y_{12}u_{12} - y_{31}u_{31},$$

se obţin relaţiile de transfigurare:

$$y_{12} = y_{12}^{12} - y_{12}^{23} - y_{12}^{31} + y_{23}^{31},$$
$$y_{23} = y_{23}^{23} - y_{23}^{23} - y_{23}^{12} + y_{23}^{12},$$
$$y_{31} = y_{31}^{31} - y_{31}^{12} - y_{31}^{23} + y_{12}^{23}.$$

În particular, în cazul a trei bobine identice, cu conductivităţile propri L şi cuplate simetric prin inductivitatea mutuală M, se obţine:

$$L_e = L + M,$$

(deoarece $\Gamma_{kj} = L/(L^2 - M^2)$, $\Gamma_{kj} = (-M)/(L^2 - M^2)$).

Echivalarea condiţiilor iniţiale

Teoremele prezentate au presupus ca bobinele au condiţii iniţiale nule. Pentru studiul bobinelor cu condiţii iniţiale nenule se recomandă modelarea condiţiilor iniţiale prin surse independente.

Perechea de bobine cuplate este caracterizată de ecuaţiile diferenţiale:

$$u_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt},$$
$$u_2 = L_{21}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt}.$$

Sau în cazul folosirii inductivităţilor reciproce:

$$\frac{di_1}{dt} = \Gamma_{11}u_1 + \Gamma_{12}u_2,$$

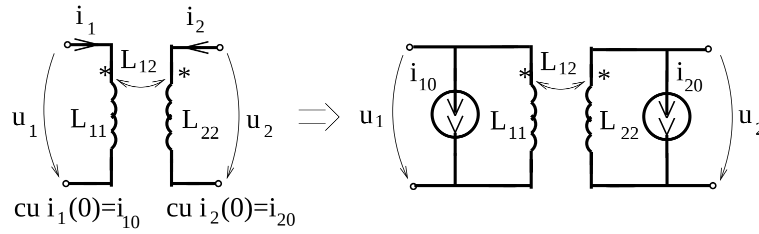


Fig. 4.51.

$$\frac{di_2}{dt} = \Gamma_{21}u_1 + \Gamma_{22}u_2.$$

Întegrând aceste ecuaţii pe intervalul $(0, t)$, rezultă:

$$i_1(t) = i_1(0) + \int_0^t (\Gamma_{11}u_1 + \Gamma_{12}u_2)dt',$$

$$i_2(t) = i_2(0) + \int_0^t (\Gamma_{21}u_1 + \Gamma_{22}u_2)dt',$$

relaţii care corespund unei perechi de bobine cuplate cu condiţii iniţiale nule, fiecare bobină fiind conectată în paralel cu o sursă de curent $i_{10} = i_1(0)$ şi $i_{20} = i_2(0)$. Dacă se notează cu:

$$y_{kj} = \Gamma_{kj} \cdot \int_0^t u_j dt',$$

operatorul de admitanţă, liniar, se obţin relaţiile:

$$\begin{cases} i_1 = i_{10} + y_{11}u_1 + y_{12}u_2 \\ i_2 = i_{20} + y_{21}u_1 + y_{22}u_2, \end{cases}$$

Exprimând tensiunile la bornele bobinelor se obţin expresiile:

$$\begin{cases} u_1 = z_{11}(i_1 - i_{10}) + z_{12}(i_2 - i_{20}) \\ u_2 = z_{21}(i_1 - i_{10}) + z_{22}(i_2 - i_{20}), \end{cases}$$

în care z este un operator matriceal de impedanţă, definit prin $z = y^{-1}$. Componentele lui vor fi $z_{kj} = L_{kj}\frac{di}{dt}$. În consecinţă, condiţiile iniţiale vor putea fi reprezentate şi prin surse ideale de tensiune (figura 52) cu t.e.m. $e_{11} = -z_{11}i_{10} = -L_{11}i_{10}\delta(t)$, $e_{12} = -z_{12}i_{20} = -L_{22}i_{20}\delta(t)$, $e_{21} = -z_{21}i_{10} = -L_{21}i_{10}\delta(t)$ şi $e_{22} = -z_{22}i_{20} = -L_{22}i_{20}\delta(t)$.

Se constată că aceste surse ideale de tensiune au o variaţie în timp de tip impuls Dirac $\delta(t)$, multiplicat cu fluxul iniţial prin fiecare bobină $\varphi_{10} = L_{11}i_{10} + L_{12}i_{20}$ şi $\varphi_{20} = L_{21}i_{10} + L_{22}i_{20}$, fiind orientate în sensul de referinţă al curentului. Această afirmaţie este valabilă şi în cazul în care numărul de bobine cuplate este mai mare de două.

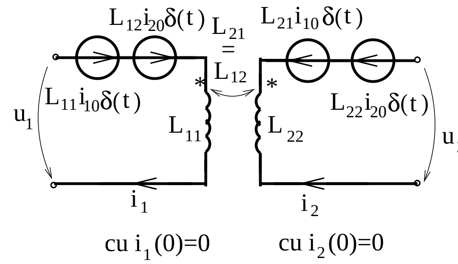


Fig. 4.52.

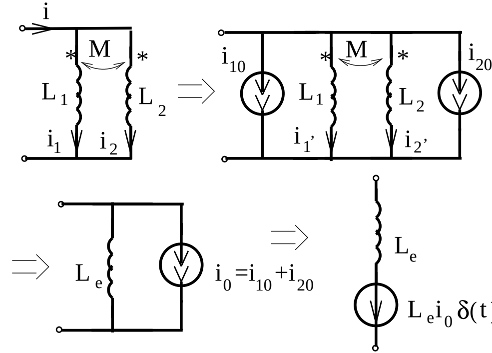


Fig. 4.53.

În figura 53 se reprezintă circuitul echivalent pentru două bobine cuplate conectate în paralel.

În figura 54 se reprezintă cazul conexiunii serie unde $j_0 = \varphi_0/L_e = (\varphi_{10} + \varphi_{20})/L_e = ((L_1 + M)i_{10} + (L_2 + M)i_{20})/(L_1 + L_2 + 2M)$.

4.8 Analiza prin transfigurare a circuitelor electrice. Metoda generatoarelor echivalente

Teorema divizorului de tensiune

Două elemente dipolare de circuit EDC1, EDC2 conectate în serie (figura 55) alcătuiesc un circuit numit divizor de tensiune, deoarece tensiunea u aplicată circuitului se divizează în două conponente u_1 şi u_2, astfel încât $u = u_1 + u_2$. Dacă se presupune că cele două elemente sunt caracterizate prin operatorii de impedanţă z_1 şi z_2, cu acelaşi domeniu, atunci circuitul este echivalent cu un element dipolar cu operatorul de admitanţă $z = z_1 + z_2$, care se va presupune inversabil. În aceste condiţii, intensitatea curentului este:

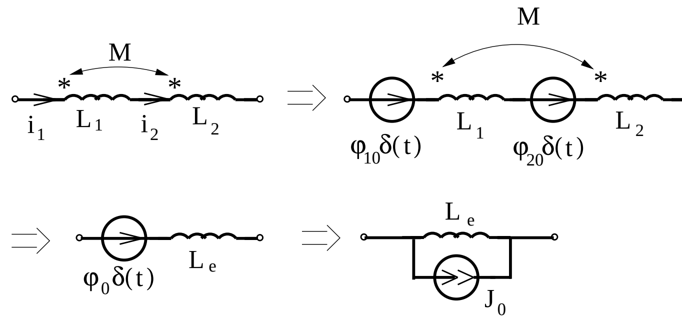


Fig. 4.54.

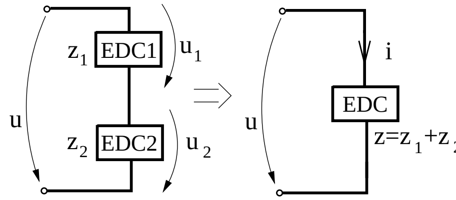


Fig. 4.55.

$$i = (z_1 + z_2)^{-1}u,$$

şi determină tensiunile:

$$u_1 = z_1 i = z_1(z_1 + z_2)^{-1}u,$$
$$u_2 = z_2 i = z_2(z_1 + z_2)^{-1}u,$$

expresii cunoscute sub numele de relaţiile divizorului de tensiune.

În particular, în cazul elementelor ideale liniare, aceste relaţii capătă formele:

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}u,\ u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}u,$$

pentru cazul divizorului rezistiv de tensiune;

$$u_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2}u,\ u_2 = \frac{L_2}{L_1 + L_2}u,$$

pentru divizorul inductiv de tensiune (cu condiţii iniţiale nule);

$$u_1 = \frac{S_1}{S_1 + S_2}u = \frac{C_1}{C_1 + C_2}u,\ u_2 = \frac{S_2}{S_1 + S_2}u = \frac{C_1}{C_1 + C_2}u,$$

pentru divizorul capacitiv de tensiune (cu condiţii iniţiale nule).

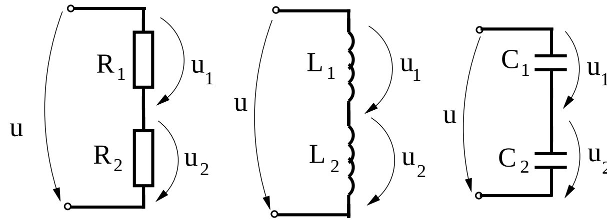


Fig. 4.56.

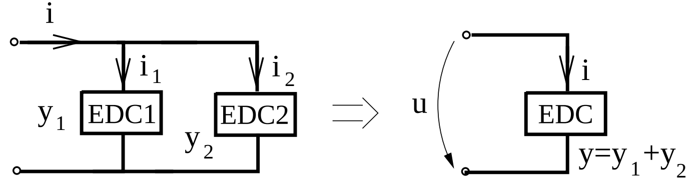


Fig. 4.57.

Teorema divizorului de curent

Două elemente dipolare de circuit conectate paralel (figura 57) alcătuiesc un divizor de curent, deoarece, curentul $i = i_1 + i_2$ este divizat în i_1 si i_2. Considerând că cele două elemente sunt caracterizate prin operatorii de admitanţă y_1 şi y_2 cu domenii identice, divizorul de curent este echivalent cu un element dipolar de circuit cu operatorul de admiatanţă $y = y_1 + y_2$. Presupunând acest operator inversabil, tensiunea la bornele divizorului este:

$$u = (y_1 + y_2)^{-1} i,$$

deci fiecare latură a divizorului va fi străbătută de:

$$i_1 = y_1 u = y_1 (y_1 + y_2)^{-1} i,$$

$$i_2 = y_1 u = y_2 (y_1 + y_2)^{-1} i.$$

Aceste expresii se numesc relaţiile divizorului de curent. În cazul particular al elementelor ideale liniare (figura 58) aceste relaţii capătă formele:

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i, \;\; i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i,$$

pentru divizorul rezistiv de curent.

$$i_1 = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} i = \frac{L_2}{L_1 + L_2} i, \;\; i_2 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} i = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i,$$

pentru divizorul inductiv de curent (cu condiţiile iniţiale nule).

$$i_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} i,\ \ i_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} i,$$

pentru divizorul capacitiv de curent (cu condiţii iniţiale nule).

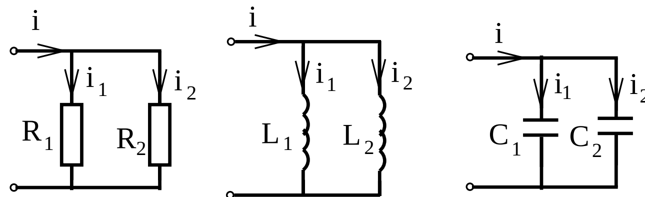


Fig. 4.58.

Teoremele divizoarelor de curent şi tensiune împreună cu teoremele de echivalenţă serie - paralel reprezintă baza teoretică a unei metode de maximă eficienţă pentru analiza circuitelor electrice. Principiul acestei metode constă în transfigurarea succesivă a circuitului prin înlocuirea laturilor conectate serie cu un singur element dipolar şi a laturilor conectate paralel cu un element dipolar echivalent, până la reducerea circuitului la o singură buclă. După determinarea curentului ce străbate această buclă, se revine la circuitul iniţial, la care se determină curenţii şi tensiunile prin aplicarea succesiv a teoremelor divizorului de curent sau de tensiune.

Metoda prezentată, cunoscută şi sub numele de metoda generatoarelor echivalente poate fi extinsă de la circuit cu conexiune mixtă la circuite cu topologie mai complicată, prin utilizarea transfigurărilor stea - triunghi. În acest caz, se elimină pe rând câte un nod din circuit, considerându-l nodul central al unei stele, care se transformă într-un poligon complet.

Pentru a exemplifica aplicarea metodei se va considera pentru început cazul circuitelor liniare în regim staţionar. Deoarece în acest caz bobinele şi condensatoarele se comportă ca rezistoare degenerate (conductoare şi respectiv izolatoare perfecte), singurele elemente ideale care intervin sunt rezistoarele (R), sursele de tensiune (E) şi cele de curent (I).

Tabelul din figura 59 prezintă parametrii elementelor echivalente obţinute prin toate combinaţiile serie - paralel de elemente R,E,I. Valorile acestor parametri au fost obţinute prin aplicarea teoremelor de echivalenţă stabilite în paragrafele anterioare.

Se constată că orice combinaţie serie - paralel de elemente ideale se reduce în final la o sursă reală de tensiune (în particular la un rezistor, dacă $E = 0$, sau la o sursă ideală de tensiune, dacă $R = 0$) sau la o sursa ideală de curent (care este ireductibilă la o sursă reală de tensiune).

Aplicaţie: Fie circuitul din figura 60:

serie / paralel	R_1	E_1	J_1	R_1 E_1	J_1 R_1		
R_2	$\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ R_1+R_2	E_1 R_2	J_1	R_1+R_2 E_1	J_1R_1 R_1+R_2	R_2	
E_2	E_2	E_1+E_2	J_1	R_1 E_1+E_2	$E_2+J_1R_1$ R_1	R_2 E_2	
J_2	J_2R_1 R_1	E_1	J_1+J_2	J_2	J_2	J_2	
R_2 E_2	$\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ $\frac{E_2R_1}{R_1+R_2}$	E_1	R_2 $E_2+R_2J_1$	(1) R_1+R_2 E_1+E_2	R_1+R_2 $J_1R_1+E_2$	R_2 E_2	
J_2 R_2	$\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ J_2R_2	E_1	R_2 $(J_1+J_2)R_2$	$\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ $\frac{J_2R_2R_1+E_1R_2}{R_1+R_2}$	(2) R_1+R_2 $J_1R_1+J_2R_2$	R_2 J_2R_2	
	R_1	E_1	J_1	R_1 E_1	R_1 R_1J_1		

(1) $\begin{cases} R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \\ E=\frac{E_1R_2+E_2R_1}{R_1+R_2} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \\ E=(J_1+J_2)(R_1\|R_2) \end{cases}$

Fig. 4.59.

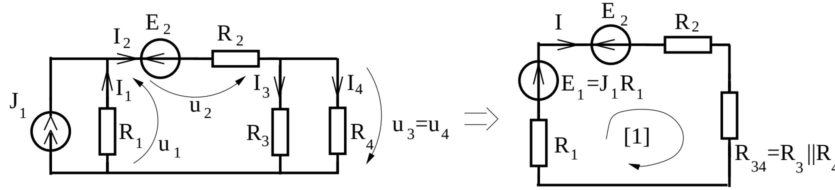


Fig. 4.60.

Transfigurând generatorul real de curent (J, R_1) într-un generator real de tensiune (E_1, R_1) şi înlocuind rezistoarele R_3, R_4 cu o rezistenţă echivalentă $R_{34} = (R_3 R_4)/(R_3 + R_4)$ se obţine circuitul cu o singură buclă, la care intensitatea curentului electric I se obţine din a doua teorema Kirchhoff:

$$[1] : R_1 I - E_1 + E_2 + R_2 I + R_{34} I = 0 \Rightarrow I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_{34}}.$$

Deoarece latura (E_2, R_2) nu a fost afectată de transfigurări, rezultă că aceasta este străbătută de curentul $I_2 = I$. Intensităţile I_3 şi I_4 se obţin prin aplicarea relaţiei divizorului de curent rezistiv:

$$I_3 = I_2 \frac{R_4}{R_3 + R_4}, \; I_4 = I_2 \frac{R_3}{R_3 + R_4}.$$

Curentul I_1, rezultă din prima teorema Kirchhoff:

$$(1) : I_1 + J_1 = I_2 \Rightarrow I_1 = I - J_1,$$

tensiunile la bornele laturilor au expresiile:

$$U_1 = R_1 I_1, \; U_2 = E_2 + R_2 I_2, \; U_3 = U_4 = R_{34} I.$$

4.9 Folosirea similitudinii în analiza circuitelor electrice

Metoda prezentată poate fi aplicată şi în cazul circuitelor liniare rezistive, în regim variabil, ecuaţiile circuitelor (R, E, J), ce nu conţin elemente acumulatoare de energie, fiind în fiecare moment identice cu ecuaţiile circuitelor (R, E, J).

Ecuaţii similare au şi circuitele cu surse ideale de curent şi bobine, în regim staţionar. Circuitele (L, J) în regim staţionar sunt caracterizate prin faptul că tensiunile la bornele elementelor sunt nule, totuşi relaţiile constitutive ale bobinelor $\phi = LI$ (similare relaţiilor $U = RI$ din circuitele rezistive) permit determinarea fluxurilor magnetice ale bobinelor. În consecinţă între ecuaţiile circuitelor

rezistive (R, J) şi ecuaţiile circuitelor inductive (L, J) se poate stabili o relaţie de similitudine, caracterizată de tabelul:

Circuite (R,J)	I	U	R
Circuite (L,J)	J	ϕ	L

Se constată că fluxul magnetic este similar tensiunii electrice şi inductivitatea este similară rezistenţei. În consecinţă circuitele (L, J) pot fi studiate cu metodele circuitelor (R, J) înlocuind bobinele cu rezistoare iar la revenire valorile numerice ale tensiunii vor da valorile fluxurilor.

Circuitele electrice alcătuite exclusiv din condensatoare şi surse ideale de tensiune (C, E) au în regim staţionar ecuaţii similare circuitelor (R, E).

Intensităţile curenţilor sunt nule prin toate laturile circuitelor (C, E), în schimb fiecare condensator este caracterizat prin relaţia constitutivă $Q = CU$, similară relaţiei $I = GU$. Între circuitele (C, E) şi cele (R, E) există o similitudine caracterizată de tabelul:

Circuite (L,E)	I	U	G = VR
Circuite (R,E)	Q	U	C = VS

Rezultă că circuitele (C, E) pot fi studiate ca circuite (R, E), înlocuind condensatoarele cu rezistoare având conductanţa cu valoarea numerică egală cu capacitatea condensatoarelor substituite iar în final curenţii din circuitul rezistiv similar vor da valorile numerice ale sarcinilor condensatoarelor.

La circuitele (R, C, E) cu rezistoare, condensatoare şi surse ideale de tensiune în regim staţionar distribuţia curenţilopr se determină înlocuind condensatoarele cu izolatoare perfecte. În schimb, pentru a determina tensiunile în circuit este necesară luarea în considerare şi a capacităţilor condensatoarelor. Pentru aceasta se studiază reţeaua capacitivă la bornele căreia potenţialele sunt determinate de componenta (R, E) a circuitului.

În mod similar se procedează şi în cazul circuitelor (R, L, J).

Aplicaţie: Fie circuitul, în regim staţionar, din figură 61

Deoarece în regim staţionar curenţii ce străbat condensatoarele sunt nuli, rezultă că acestea pot fi eliminate din circuit, fără ca intensităţile curenţilor să se modifice.

Se constată că laturile 1 şi 6 sunt conectate în paralel, deci vor putea fi înlocuite cu sursa reală de tensiune cu parametrii $E_{16} = E_1 R_6/(R_1 + R_6)$ şi $R_{16} = R_1 R_6/(R_1 + R_6)$. Intensitatea curentului prin latura 2, ramură neafectată de transfigurare este $I_2 = E_{16}/(R_{16} + R_2)$.

Potenţialul nodului (1) este

$$V_1 = U_2 = R_2 I_2 = E_{16} \frac{R_2}{R_{16} + R_2},$$

egal cu tensiunea U_2, la bornele laturilor 1, 2 şi 6. Curentul prin latura 6 este $I_6 = V_1/R_6$ cu $I_1 = I_6 + I_2$.

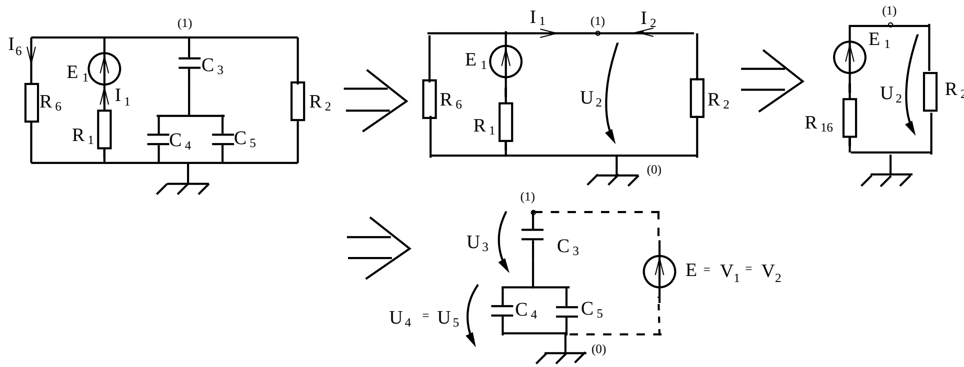


Fig. 4.61.

Pentru determinarea tensiunilor la bornele laturilor 3, 4 şi 5 se studiază reţeaua capacitivă C_3, C_4, C_5, care are la nodul (1) potenţialul $V_1 = U_2$. Laturile 4, 5 se pot transfigura într-o latură capacitivă cu $C_45 = C_4 + C_5$. Aplicând relaţia divizorului capacitiv de tensiune, rezultă:

$$U_3 = \frac{C_45}{C_3 + C_45}, \;\; U_4 = \frac{C_3}{C_3 + C_45}.$$

4.10 Analiza circuitelor rezistive neliniare simple. Metoda dreptei de sarcină

Cele mai simple circuite rezistive neliniare sunt cele care conţin un singur element neliniar, restul fiind elemente rezistive de circuit liniar (R, E, J). După cum s-a arătat în paragraful anterior, partea liniară a circuitului poate fi echivalată cu o sursă reală de tensiune sau de curent (fig. 62)

Perechea de mărimi (u, i) trebuie să satisfacă simultan şi ecuaţia rezistorului liniar, dar şi cea a sursei echivalente. Sursa echivalentă de tensiune are ecuaţia:

$$u = e - Ri,$$

care reprezintă o dreaptă în planul i-u ce taie axele în punctele $e, i_S = \frac{C}{R}$. În consecinta (u, i) reprezintă coordonatele punctului de intersecţie între graficul funcţiei $f(i)$ şi dreapta caracteristica părţii liniare, numită dreapta de sarcină. (fig. 63)

Dacă partea liniară a circuitului se echivalează cu o sursă reală de curent, atunci:

$$i = j - Gu,$$

şi dreapta de sarcină taie axele în punctele j şi $u_0 = j/G$.

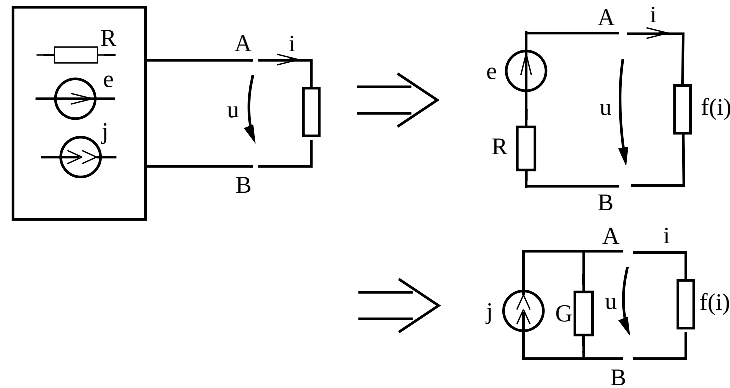


Fig. 4.62.

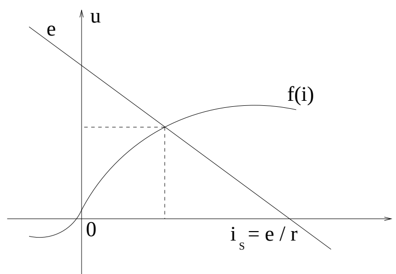


Fig. 4.63.

soluţia (u, i) răspunde în acest caz intersecţiei dintre graficul funcţiei $g(u)$ şi această dreptă de sarcină (fig. 64)

În cazul circuitelor cu un element neliniar este posibil ca drepta de sarcină să nu intersecteze graficul elementului neliniar (fig. 65) sau îl intersectează în mai multe puncte, (fig. 65) deci soluţia problemei să nu existe, sau să existe soluţii multiple.

Valorile u, i se pot determina prin:

- metode analitice
- metode grafice
- metode numerice

Eliminând din sistemul de ecuaţii algebrice:

$$u = e - Ri, u = f(i),$$

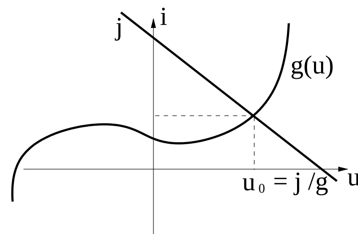


Fig. 4.64.

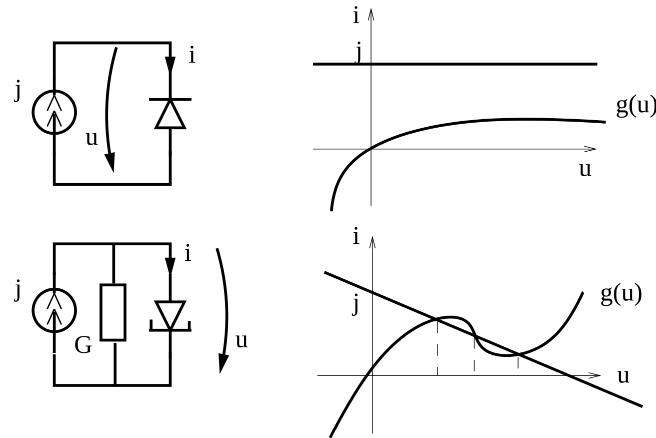


Fig. 4.65.

tensiunea u, se oţine ecuaţia neliniară

$$f(i) + Ri - e = 0,$$

prin rezolvarea căreia se determină intensitatea i.

În mod asemănător, în cadrul elementului controlat în tensiune, din siste,ul:

$$i = j - Gu, i = g(u),$$

se obţine ecuaţia $g(u) + Gu - j = 0$, prin rezolvarea căreia se determină tensiunea u la bornele elementului neliniar.

Determinarea punctului de funcţionare prin metode grafice are dezavantajul impreciziei specifice acestor metode, dar are avantajul că permite evidenţierea soluţiilor multiple şi a zonei din caracteristica neliniară în care se află punctul de funcţionare.

4.10.1 Metode numerice pentru analiza circuitelor rezistive cu un element neliniar

Soluţionarea numerică a ecuaţiei neliniare $F(x) = 0$, în care $F(x) = f(x)+Rx-e$, cu $x = i$ sau $F(x) = g(x) + Gx - j$, cu $x = u$ urmăreşte determinarea unei aproximaţii a soluţiei exacte. În acest scop se pot folosi:

– metode aproximării liniare pe porţiuni

– metode iterative

Metoda aproximării liniare pe porţiuni foloseşte în locul funcţiei F(x) aproximaţia:

$$\overline{F}(x) = a_0 + b_1 x + \sum_{k=1}^{n} b_k |x - x_k|.$$

Pe fiecare interval $x \in (x_k, x_{k+1})$, k = 0, 1, 2, ... n rezistorul neliniar admite o schemă echivalentă liniară (sursă reală de tensiune sau curent). Presupunând că $i \in (i_k, i_{k+1})$, cu k = 0 se înlocuieşte rezistorul neliniar cu sursa reală de tensiune echivalentă, având parametrii (R_k, E_k). Prin analiza circuitului liniar (fig. 66) se obţine:

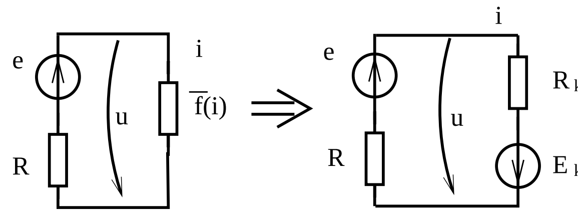


Fig. 4.66.

$$i^* = (e - +E_u)/(R + R_k).$$

Dacă $i^* \in (i_k, i_{k+1})$, atunci acesta este soluţia problemei altfel se incrementează k şi procedura se reia.

Se constată că pentru analiza unui circuit care conţine un rezistor neliniar cu caracteristica aproximată prin n segmente de dreaptă, este necesară analiza a cel mult n circuite liniare. Efortul de calcul poate fi sensibil micşorat, dacă se cunoaşte segmentul în care se află punctul de funcţionare. Pentru determinarea acestuia se poate aplica metoda grafică a dreptei de sarcină.

Metodele iterative reprezintă o categorie de metode dedicate în special calculatoarelor numerice, în care soluţia ecuaţiei $F(x) = 0$ se obţine ca limita unui sir definit recursiv: $x_{k+1} = G(x_k)$, k = 0, 1, 2,... . Dacă acest şir este convergent către soluţia x^* a ecuaţiei $F(x) = 0$, se poate reţine termenul x_n ca soluţie

aproximativă a deoarece pentru orice eroare impusă ε, există un n astfel încât $|x_n - x^*| < \varepsilon$.

Dintre metodele de definiţie ale şirului recursiv cel mai des folosite sunt metoda iteraţiei simple şi metoda tangentei (Newton Raphson).

În cazul controlului în curent $F(x) = f(x) + Rx - e = 0$ expresie, care poate fi rescrisă sub forma:

$$x = (e - f(x))/R,$$

ceea ce corespunde iteraţiilor:

$$x_{k+1} = (e - f(x_k))/R,$$

k = 0, 1, 2,... .

Modul în care evoluează iteraţiile este reprezentat grafic în (fig. 67). Pornind de la o iniţializare $x_0 = i_0$ arbitrară se constată că $i_k = x_k$ tinde către soluţia problemei aflată la intersecţia dreptei de sarcină cu caracteristica elementului

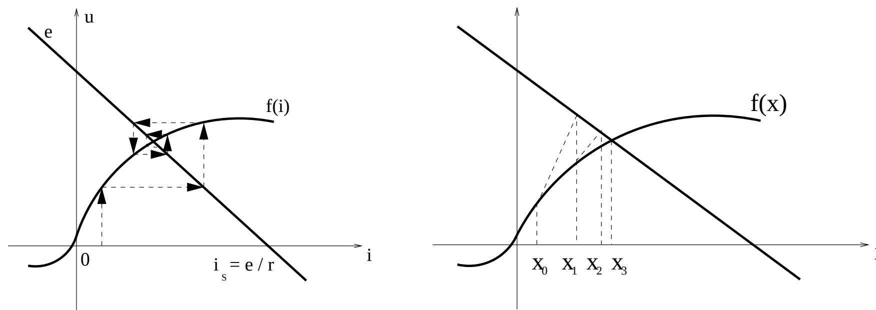


Fig. 4.67.

neliniar.

Această metodă nu este convergentă pentru orice caracteristică f. O condiţie suficientă de convergenţă este ca funcţia G să fie o contracţie, respectiv ca $|G'| < 1$, condiţie îndeplinită dacă rezistenţa dinamică $R_d = f'(i)$ a elementului neliniar este mai mică decât rezistenţa R a sursei reale de tensiune. În cazul controlului în tensiune $x_{k+1} = (j - g(x_k))/G$, metoda iteraţiei simple este convergentă, dacă conductanţa dinamică este mai mică decât conductanţa internă a sursei echivalente de curent. De exemplu dacă în (fig. 67), elementul neliniar se consideră controlat în tensiune, ciclul iterativ se va derula în sensul invers al săgeţilor şi şirul x_k va fi divergent. Aceste observaţii permit în cazul elementelor neliniare cu caracteristică bijectivă alegerea modului de control, care să asigure convergenţa şirului iterativ.

Metoda iteraţiei simple are dezavantajul unei mici viteze de convergenţă. Pentru a îmbunătăţii viteza de convergenţă se utilizează metoda tangentei. În acest

caz, funcţia $F(x)$ se aproximează cu primii doi temeni din seria Taylor:

$$F(X_{k+1}) \cong F(x_k) + (x_{k+1} - x_k)F'(x_k),$$

echivalentă cu aproximarea graficului funcţiei F(x) prin tangenta dusă în punctul $x = x_k$. Din condiţia $F(x_{k+1}) = 0$, rezultă

$$x_{k+1} = x_k - F(x_k)/F'(x_k),$$

k = 0, 1, 2,... care reprezintă şirul iterativ specific metodei Newton Raphson (fig. 68)

În cazul controlului în curent, $F(x) = f(x) + Rx - e$ şi

$$F'(x) = f'(x) + R = R_d(x) + R,$$

derivata funcţiei F fiind suma dintre rezistenţa dinamică a rezistorului neliniar şi rezistenţa internă a sursei echivalente de tensiune. Curentul la iteraţia $k+1$ se determină în funcţie de cel de la iteraţia anterioară cu relaţia:

$$i_{k+1} = i_k - (f(i_k) + Ri_k - e)/(R_d(i_k) + R),$$

Se constată că acestă relaţie, adusă sub forma:

$$i_{k+1} = \frac{e - f(i_k) + R_d(i_k) \cdot i_k}{R + R_D(i_k)} = \frac{e - R_k}{R + R_d(i_k)}.$$

Corespunde unui circuit electric obţinut prin înlocuirea elementului neliniar cu o sursă reală de tensiune având parametrii $R_k = R_d(i_k)$, $e_k = f(i_k) - R_d(i_k) \cdot i_k$. În consecinţă, la fiecare iteraţie, elementul neliniar cu caracteristică $u = f(i)$ se înlocuieşte cu un element având caracteristica

$$u_{k+1} = f(i_k) + (i_{k+1} - i_k)R_d(i_k),$$

obţinută prin reţinerea a primilor doi termeni din seria Taylor asociată.

Aplicând metoda Newton-Raphson elementelor controlate în tensiune se constată că la fiecare iteraţie, elementul neliniar se înlocuieşte cu sursă reală de curent cu parametrii $G_k = G_d(u_k) = g'(u_k)$, $j_k = g(u_k) - G_k \cdot u_k$. Aceste circuite echivalate elementelor neliniare se numesc circuite liniarizate. În consecinţă, analiza circuitelor neliniare prin metode iterative presupune rezolvarea unui sir de circuite liniare până când soluţiile succesive devin suficient de apropiate.

Metoda Newton-Rapshon poate fi generalizată la cazul circuitelor cu mai multe elemente neliniare, când la fiecare iteraţie se înlocuiesc toate rezistoarele neliniare cu circuitele lor echivalente. În acest caz caracteristica circuitului conectat la bornele unui element neliniar nu se mai reprezintă grafic printr-o dreaptă în planul u-i ci printr-o curbă neliniară. Perechea u,i specifică unui element neliniar reprezintă coordonatele punctului de intersecţie dintre graficul caracteristicii elementului şi curba de sarcină, specifică restului circuitului (fig. 69)

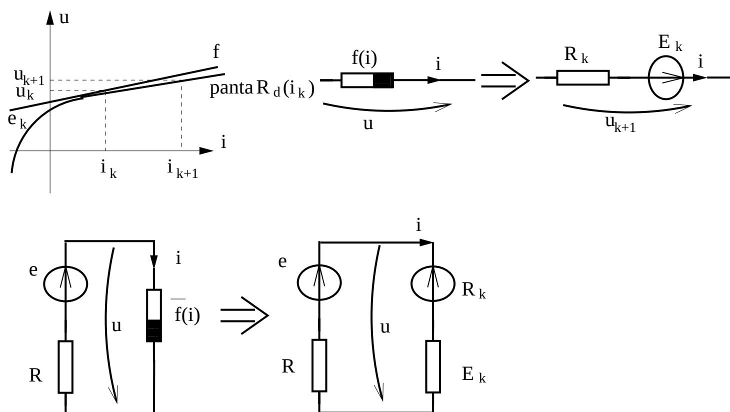


Fig. 4.68.

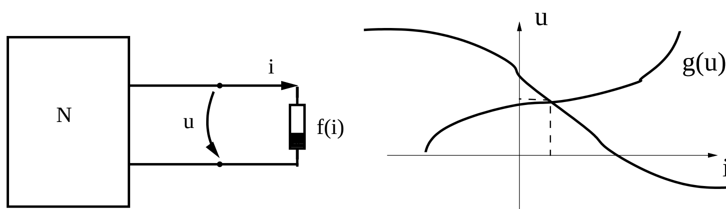


Fig. 4.69.

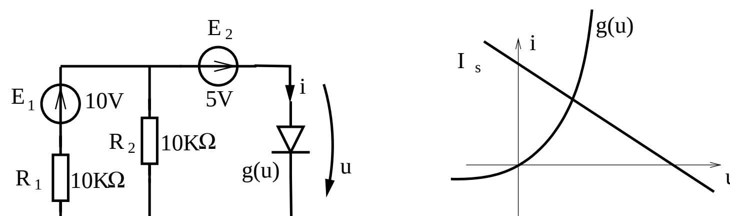


Fig. 4.70.

Aplicaţia 1:

Fie circuitul din (fig. 70), la care $g(u) = I_0(e^{+u/v_0} - 1)$ cu $I_0 = 10^{-6}A$, $V_0 = 0,027V$. Pentru determinarea generatorului echivalent părţii liniare se constată că laturile 1 şi 2 sunt conectate în paralel, deci sunt echivalente cu o sursă reală de tensiune cu parametrii: $R_{12} = R_1R_2/(R_1 + R_2) = R_1/2 = 5K\Omega$, $E_{12} = E_1R_2/(R_1 + R_2) = E_1/2 = 5V$. Aceasta înseriată cu sursa $E_3 = 5V$ determină $E_{123} = 10V$. Dreapta de sarcină taie axele în punctele $V_0 = 0V$ şi $I_S = E/R_{12} = 2mA$ şi are ecuaţia $i = I_S - Gu$ cu $G = VR_{12}$. Pentru determinarea tensiunii u la bornele diodei trebuie rezolvată ecuaţia $10^{-6}(e^{+u/0,027} - 1) = 2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}u$. Care este o ecuaţie transcendentă. Pe cale grafică se constată că $0 < i < I_S$ şi $0 < u < V_0$, dioda fiind polarizată direct. Deoarece în punctul de funcţionare, rezistenţa dinamică a elementului neliniar este mai mică decât rezistenţa echivalentă R_{12}, pentru a asigura convergenţa iteraţiilor simple, rezistorul trebuie controlat în curent $u = V_0(i/I_0 + 1)$ iar ecuaţia părţii liniare scrisă sub forma $u = v_0 - Ri$. În aceste condiţii iteraţiile $i_{k+1} = (U_0 - V_0 \ln(i_k/I_0 + 1))/R$ vor fi convergente.

Dacă se aplică metoda tangentei, la fiecare ioteraţie, dioda semiconductoare trebuie înlocuită cu o sursă reală de tensiune cu parametrii $R_k = g'(i_k) = v_0/(i_k + I_0)$, $e_k = g(i_c) - R_ki_k = V_0 \ln(i_k/I_0 + 1) - v_0i_k/(i_k + I_0)$, ceea ce corespunde unui curent:

$$i_{k+1} = \frac{v_0 - e_k}{R + R_k}.$$

Aplicaţia 2:

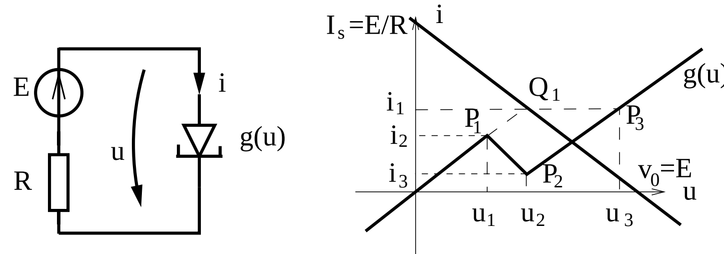


Fig. 4.71.

Fie circuitul din (fig. 71), în care dioda tunel are caracteristica $i = g(u)$, al cărui grafic trece prin punctele P_1, P_2 şi P_3 cu coordonatele $u_1 = 1V$, $i_1 = 10mA$, $u_2 = 2V$, $i_2 = 5mA$, $u_3 = 3V$, $i_3 = 20mA$ iar sursa reală de tensiune are parametrii $E = 5V$, $R = 100\Omega$.

Pentru determinarea soluţiei u,i se presupune, pentru început $u < u_1$, ceea ce corespunde aproximării $g(u) = G_1U = (i_1u)/u_1 = 10^{-2}u$. Înlocuind dioda tunel cu un rezistor liniar cu rezistenţa $R_1 = 1/G_1 = 100\Omega$ se obţin, $i = E/(R + R_1) = 25mA$, $u = ER_1/(R + R_1) = 2,5V$, coordonatele punctului Q_1. Deoarece $u > u_1$

rezultă că aceasta nu este soluţia problemei, punctul Q_1, neobţinându-se pe

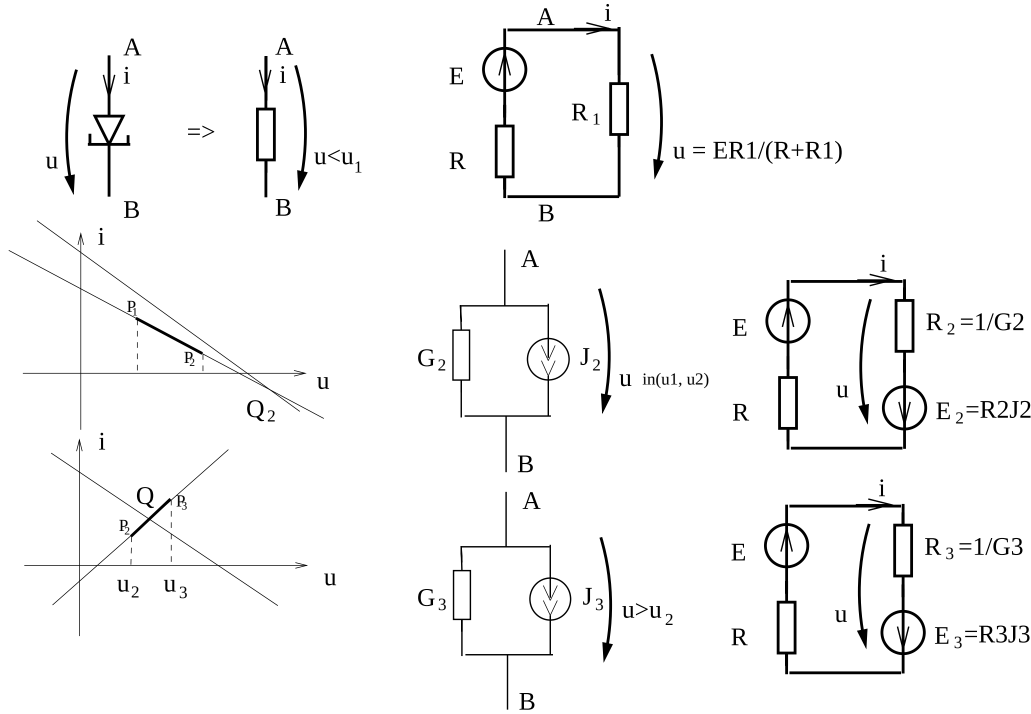


Fig. 4.72.

caracteristica elementului neliniar.

Presupunând că soluţia $u \in (u_1, u_2)$, dioda tunel are în această zonă caracteristica:

$$g(u) = i_1 + \frac{i_2 - i_1}{u_2 - u_1}(u - u_1) = J_2 + G_2 u,$$

deci este echivalentă cu o sursă reală de curent cu parametrii: $G_2 = (i_2 - i_1)/(u_2 - u_1) = -5mS$, $J_2 = i_1 - G_2 u = 15mA$, sau cu o sursă de tensiune cu parametrii $R_2 = 1/G_2 = -200\Omega$, $E_2 = R_2 J_2 = 3V$.

Curentul are în acest caz valoarea (fig. 72) $i = (E + E_2)/(R + R_2) = -80mA$, iar tensiunea $u = E - Ri = R_2 i - E_2 = 13V$. Deoarece tensiunea nu satisface condiţia $u \in (u_1, u_2)$, nici această zonă $P_1 - P_2$ nu conţine punctul de funcţionare Q_2.

În cazul în care presupunem că $u > u_2$, dioda tunel are caracteristica:

$$g(u) = i_2 + \frac{i_3 - i_2}{u_3 - u_2}(u - u_2) = J_3 + G_3 u,$$

cu $G_3 = (i_3 - i_2)/(u_3 - u_2) = 15mS$, $J_3 = -25mA$, ceea ce corespunde la $R_3 = 1/G_3 = 200/3\Omega$, $E_3 = R_3 J_3 = -5/3V$.

Intensitatea curentului este $i = (E + E_3)/(R + R_3) = 20mA$, iar tensiunea $u = E - Ri = 3V$. Deoarece în acest caz ipoteza este satisfăcută, perechea $u = 3V$, $i = 20mA$ este soluţia problemei.

Efortul de calcul ar fi putut fi micşorat dacă se cunoştea zona în care este plasat punctul de funcţionare. Aceasta poate fi determinată prin metoda dreptei de sarcină, care din păcate nu poate fi aplicată de sistemele numerice de calcul.

Aplicaţia 3:

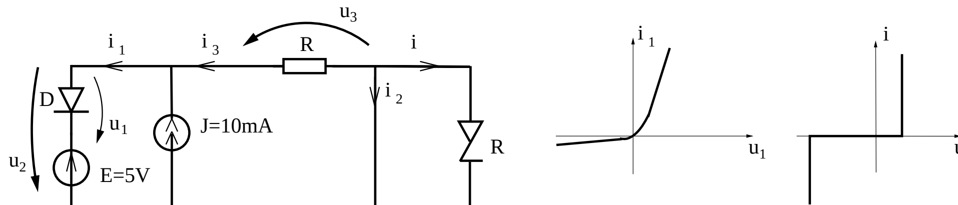


Fig. 4.73.

Pentru analiza circuitului din figură (fig. 73) se va aplica metoda curbei de sarcină. Prin înserierea diodei D cu sursa E, $u_2 = u_1 + E$ şi caracteristica se translatează la dreapta cu $E = 5V$. Prin conectarea în paralel cu sursa J, $i_3 = i_1 - J$ şi caracteristica se deplasează în jos cu $J = 10mA$ (fig. 74).

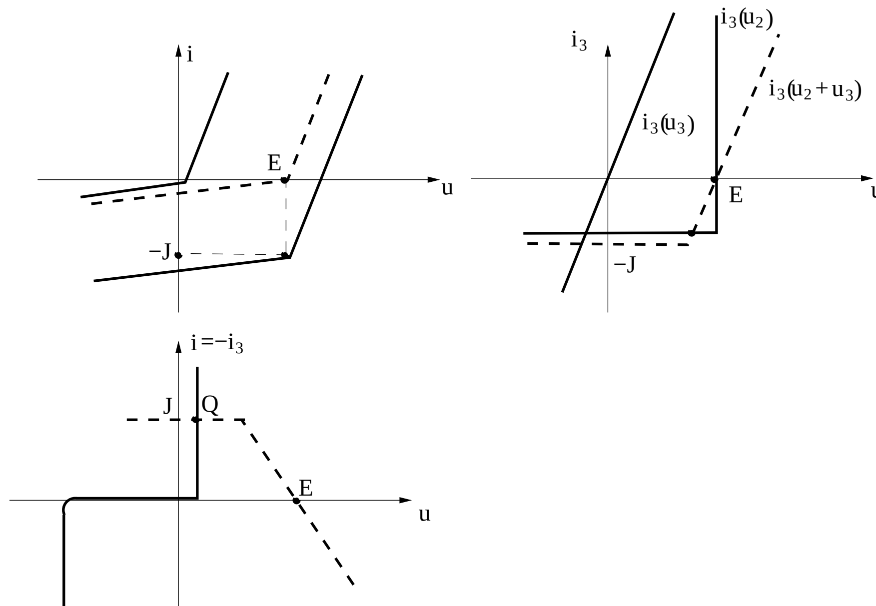


Fig. 4.74.

Prin înseriere cu reostatul $R = 1K\Omega$, $u = u_2 + u_3$ şi caracteristica se modifică conform figurii. Graficul funcţiei $i_3(u)$ trebuie răsrurnat prin simetrie faţă de axa tensiunii, deoarece $i = -i_3$. Reprezentând în planul u-i planul diodei Zener $i(u)$ şi curba de sarcină $i = -i_3$ se constată că punctul lor de intersecţie Q se află în zona de polarizare directă a diodei Zener. Tensiunea la bornele acesteia este $u + 0$, iar curentul $i = J = 10mA$. Dioda D este blocată, deci $i_1 = 0$, $u_3 = Ri_3 = -10V$, iar $u_1 = -u_3 + u - E = -15V$.

4.11 Circuite electrice cu un singur element acumulator de energie.

Pentru început vor fi studiate circuitele liniare excitate cu surse având parametrii constanţi în timp, care conţin în afara părţii rezistive (R, E, J) un singur element acumulator de energie de tip inductiv (L) sau capacitiv (C). Prin înlocuirea părţii rezistive cu sursa echivalentă de curent sau tensiune aceste circuite se reduc la unul din cele patru cazuri prezentate în figură.

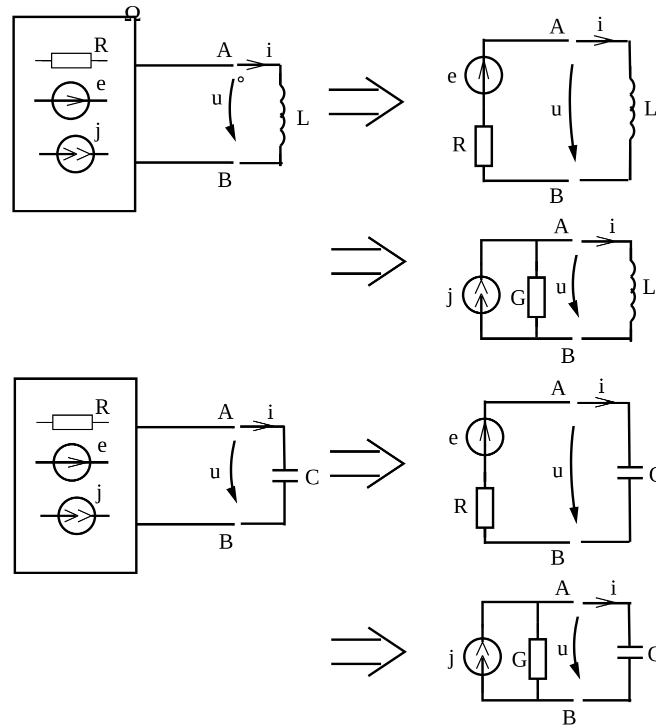


Fig. 4.75.

Analizând circuitul RL serie se obţine, pe baza celei de a doua teoreme Kirc-

khoff:

$$u + Ri - E = 0,$$

respectiv ecuaţia diferenţială satisfăcută de intensitatea curentului:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E.$$

Pentru a obţine o soluţie unică, la această ecuaţie trebuie adăugată şi condiţia iniţială $i(0) = i_0$ egală cu valoarea iniţială a curentului prin bobină.

Pentru analiza circuitului GLJ paralel se aplică prima teoremă Kirchoff:

$$i = J - Gu \text{ cu } u = L\frac{di}{dt}.$$

Prin eliminarea tensiunii u se obţine ecuaţia diferenţială:

$$GL\frac{di}{dt} + i = J,$$

satisfăcută de intensitatea curentului, cu condiţia iniţială $i(0) = i_0$.

Aplicând a doua teoremă Kirckhoff la circuitul RCE serie se obţine:

$$u + Ri - E = 0 \text{ cu } i = C\frac{du}{dt}.$$

Prin eliminarea curentului se obţine ecuaţia diferenţială:

$$RC\frac{du}{dt} + u = E,$$

cu condiţia iniţială $u(0) = u_0$ egală cu tensiunea iniţială la bornele condensatorului.

Ecuaţia diferenţială specifică circuitului GCJ paralel se obţine prin aplicarea primei teoreme Kirckhoff:

$$i = J - Gu \text{ cu } i = C\frac{du}{dt}.$$

Prin eliminarea curentului se obţine ecuaţia diferenţială:

$$C\frac{du}{dt} + Gu = J,$$

cu condiţia iniţială $u(0) = u_0$.

Se constată că cele patru ecuaţii au forma comună:

$$a_0\frac{dx}{dt} + a_1x = b_0,$$

su sondiţia iniţială $x(0) = x_0$. Valorile constantelor a_0, a_1, b_0, x_0 sunt date de tabelul 3.2.

Circuitul	a_0	a_1	b_0	x_0
RLE serie	L	R	E	i_0
GLE paralel	GL	1	J	i_0
RCE serie	RC	1	E	u_0
GCJ paralel	C	G	J	u_0

Deoarece aceste circuite sunt caracterizate de o singură ecuaţie diferenţială de ordinul întâi ele se numesc circuite de ordinul unu.

Pentru determinarea soluţiei ecuaţiei diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi se determină pentru început soluţia generală a ecuaţiei omogene:

$$a_0 \frac{dx}{dt} + a_1 x = 0.$$

Ecuaţia caracteristică a acesteia,

$$a_0 r + a_1 = 0,$$

are o singură rădăcină $r = -a_1/a_0$, soluţia generală fiind:

$$x_1(t) = Ae^{rt}.$$

Soluţia particulară a ecuaţiei neomogene se rpesupune constantă în timp $x_2(t) = B$. Prin substituţie se obţine $aB = b_0$, deci:

$$x_2(t) = B = b_0/a_1.$$

În consecinţă ecuaţia diferenţială admite soluţia:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = Ae^{rt} + B,$$

cu $r = -a_1/a_0$ şi $B = b_0/a_1$. Constanta de integrare A se obţine din condiţia iniţială:

$$x(0) = A + B = x_0\,,\; A = x_0 - B.$$

Forma finală a soluţiei este:

$$x(t) = (x_0 - \frac{b_0}{a_1})e^{-\frac{a_1}{a_0}t} + \frac{b_0}{a_1},$$

ceea ce corespunde în cele patru cazuri la:

$$i(t) = (i_0 - \frac{E}{R})e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R},$$

$$i(t) = (i_0 - J)e^{-\frac{t}{GL}} + J,$$
$$u(t) = (u_0 - E)e^{-\frac{t}{RC}} + E,$$
$$u(t) = (u_0 - \frac{J}{G})e^{-\frac{G}{C}t} + \frac{J}{G}.$$

Pentru $t \to \infty$ se constată că $x(t)$ are limita $x_\infty = \lim t \to \infty,\ x(t) = \frac{b_0}{a_1}$, ceea ce corespunde la:

$$i_\infty = \lim_{t\to\infty} i(t) = \frac{E}{R}\,,\ \ i_\infty = \lim_{t\to\infty} i(t) = J,$$

$$u_\infty = \lim_{t\to\infty} u(t) = E\,,\ \ u_\infty = \lim_{t\to\infty} u(t) = \frac{J}{G}.$$

Aceste valori corespund regimurilor staţionare ale circuitelor analizate, în care bobina se comportă ca un conductor perfect, iar condensatorul ca un izolator perfect. Notând cu $\tau = a_0/a_1$, soluţia se scrie sub forma:

$$x(t) = Ae^{-t/\tau} + B,$$

în care τ se numeşte constanta de timp a circuitului şi are valorile:

$$\tau = \frac{L}{R} = GL,$$

pentru circuitele inductive,

$$\tau = RC = \frac{C}{G},$$

pentru circuitele capacitive.

În aceste relaţii $R = 1/G$ reprezintă rezistenţa internă a sursei echivalente circuitului la bornele căruia se află conectat elementul acumulator de energie. Funcţia $x(t)$ fiind continuă în origine:

$$\lim_{t\to 0\, t<0} x(t) = \lim_{t\to 0\, t>0} x(t),$$

ea satisface egalitatea $x(0) = x_0$. Cunoşterea constantei de timp τ, a valorii iniţiale x_0 şi a valorii finale x_∞, determinată prin analiza regimului staţionar asimptotic permite determinarea variaţiei în timp a mărimii $x(t) = Ae^{-t/\tau} + B$, care este curentul prin bobină sau tensiunea la bornele condensatorului. Aceste mărimi se numesc variabile de stare şi sunt funcţii continui, spre deosebire de tensiunea la bornele bobinei sau curentul prin conductoare care nu sunt în mod necesar funcţii continui. Pentru determinarea acestora se poate folosi ecuaţia constitutivă a elementului acumulator de energie:

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = -\frac{LA}{\tau}e^{-t/\tau} = -RAe^{-t/\tau} = R\left(\frac{E - i_0}{R}\right)e^{-t/\tau},$$

$$i_L(t) = C\frac{du}{dt} = \frac{CA}{\tau}e^{-t/\tau} = \frac{A}{R}e^{-t/\tau} = R\left(\frac{E-u_0}{R} - i_0\right)e^{-t/\tau}.$$

Se constată că aceste funcţii au valoare asimptotică nulă: $\lim_{t\to\infty} u_L(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} i_C(t) = 0$.

Valoarea iniţială a tensiunii la bornele bobinei este: $u_L(0) = E - Ri_0$, ca şi cum bobina în primul moment se comportă ca o sursă de curent, cu c.e.m egal cu condiţia sa iniţială i_0. În particular, în cazul condiţiei iniţiale nule $i_0 = 0$, bobina se comportă în primul moment ca un izolator perfect.

Valoarea iniţială a curentului prin condensator este: $i_C = (E - u_0)/R$, ca şi cum acesta ar fi în primul moment o sursă ideală de tensiune cu t.e.m egală cu condiţia iniţială u_0. Dacă iniţial condensatorul este descărcat $u_0 = 0$, el se comportă ca un conductor perfect.

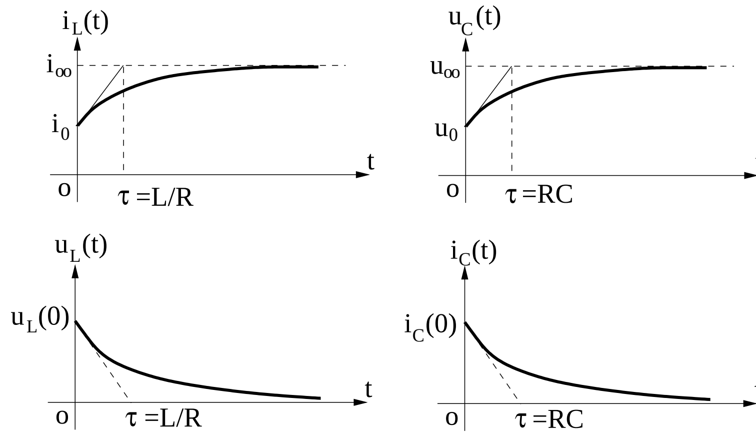


Fig. 4.76.

Modul de variaţie în timp al acestor patru mărimi este reprezentat în figura 76.

Tangenta dusă la oricare din aceste grafice în origine intersectează asimptota orizontală a graficului în punctul $t = \tau$. Se constată că după câteva constante de timp, variabilele ating practic valorile corespunzătoare regimului staţionar. De exemplu, după cinci constante de timp valoarea curentului prin condensator $i_C(t) = i_{C0}e^{-5} \cong 0.007i_{C0}$ este doar de circa 0.7% faţă de valoarea iniţială. În consecintă, constanta de timp τ reprezintă o măsură a duratei regimului tranzitoriu, de variaţie de la starea iniţială x_0 la cea finală x_∞. Totuşi după o singură constantă de timp, mărimile au parcurs doar $1 - e^{-1} \cong 63\%$ din variaţia totală şi mai au de parcurs circa 37%.

Un mod practic de a evalua timpul de creştere al unei mărimi este de a determina durata cât această mărime parcurge de la 10% pâna la 90% din variaţia sa totală.

Dacă se consideră variaţia exponenţială:

$$x(t) = Ae^{-t/\tau} + B = x_\infty + (x_0 - x_\infty)e^{-t/\tau},$$

pentru două momente de timp t_1 şi t_2 se obţin:

$$x_1 = x(t_1) = x_\infty + (x_0 - x_\infty)e^{-t_1/\tau},$$

$$x_2 = x(t_2) = x_\infty + (x_0 - x_\infty)e^{-t_2/\tau},$$

respectiv prin împărţire:

$$\frac{x_1 - x_\infty}{x_2 - x_\infty} = e^{-\frac{t_1 - t_2}{\tau}},$$

respectiv timpul cât durează tranziţia de la starea x_1 la starea x_2 este:

$$t_2 - t_1 = \tau \ln \frac{x_1 - x_\infty}{x_2 - x_\infty}.$$

În particular, dacă $x_1 = x_0 + 0.1(x_\infty - x_0)$ şi $x_2 = x_0 + 0.9(x_\infty - x_0)$, rezultă timpul de creştere:

$$t_2 - t_1 = \tau \ln \frac{0.9(x_0 - x_\infty)}{0.1(x_0 - x_\infty)} = \tau \ln(9) \cong 2.2\tau.$$

Deoarece pentru $\tau < 0$ variabila de stare tinde asimptotic către x_∞, indiferent care este valoarea sa iniţială se spune că aceste circuite sunt stabile.

În cazul în care rezistenţa echivalentă R este negativă $\tau < 0$ şi circuitul nu mai este stabil, variabilele tinzând către $\pm\infty$ pentru $t \to \infty$ (figura 77).

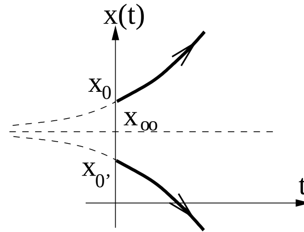


Fig. 4.77.

Constanta de timp τ poate avea următoarele două cazuri limită $\tau = 0$ şi $\tau \to \infty$. Primul caz degenerat, corespunde excitării bobinei în curent ($G = 0$) sau a condensatorului în tensiune ($R = 0$). Ambele cazuri corespund unor excitaţii improprii, saltul instantaneu al variabilei de stare de la valoarea x_0 la x_∞ determinând o tensiune nemărginită la bornele bobinei sau un curent prin condensator nemărginit.

Valoarea iniţială a constantei de timp τ corespunde excitaţiei în tensiune a bobinei sau excitaţiei în curent a unui condensator. În aceste situaţii variabila de stare are o creştere monotonă, liniară în timp, regimul tranzitoriu fiind nesfârşit.

Aplicaţia 1

Se consideră circuitul din figura 78, în care condensatorul este încărcat iniţial la tensiunea $u(0) = -10V$.

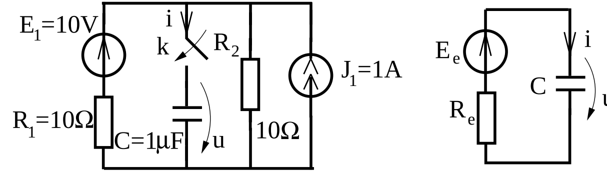


Fig. 4.78.

La momentul $t = 0$ se închide comutatorul k. Circuitul rezistiv conectat la bornele condensatorului este format dintr-o sursă reală de tensiune şi o sursă reală de curent, conectate în paralel.

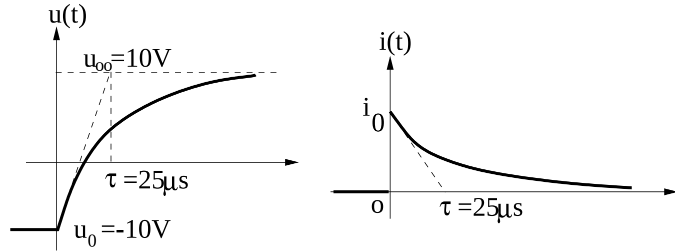


Fig. 4.79.

Acesta va fi echivalent cu o sursă reală de tensiune cu parametrii:

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 5\Omega,$$

$$E_e = \frac{ER_2 + J_1 R_2 R_1}{R_1 + R_2} = 10V.$$

Constanta de timp a circuitului este $\tau = R_e C = 25\mu s$, iar valoarea asimptotică a tensiunii la bornele condensatorului este:

$$u_\infty = E_e = 10V.$$

Pentru intervalul $t \in (0, \infty)$, tensiunea la bornele condensatorului variază conform relaţiei:

$$u(t) = Ae^{-t/\tau} + B,$$

în care A şi B se determină din sistemul:

$$\begin{cases} A + B = u_0 \\ B = u_\infty, \end{cases}$$

rezultând $B = 10V$, $A = u_0 - B = -20V$. Intensitatea curentului prin condensator se determină prin derivarea tensiunii:

$$u(t) = -20e^{-t/\tau} + 10,$$

$$i(t) = C\frac{du}{dt} = 4e^{-t/\tau}.$$

În momentul comutaţiei, curentul prin condensator are un salt de la valoarea $i(0_-) = 0$ la $i(0_+) = 4A$, în schimb tensiunea la bornele condensatorului variază continuu de la valoarea iniţială $u_0 = -10V$ la cea finală $u_\infty = 10V$.

Aplicaţia 2

Se consideră un circuit repetor cu amplificator operaţional la intrarea căruia se aplică tensiunea treaptă E_1.

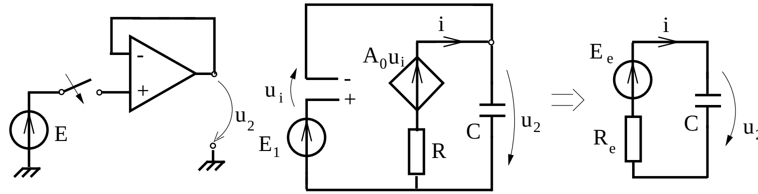


Fig. 4.80.

Pentru a determina felul în care variază tensiunea de ieşire u_2 în timp se adoptă pentru amplificatorul operaţional modelul cu rezistenţă de intrare infinită, dar cu amplificare în buclă deschisă A_0 finită şi rezistenţă de ieşire R nenulă.

Pentru a modela corect comportarea dinamică a amplificatorului operaţional, la ieşire se adaugă un condensator cu capacitate C. Schema echivalentă a părţii rezistive se obţine aplicând a doua teoremă Kirchhoff:

$$u_2 = A_0u_i - Ri = -u_i + E_1,$$

din care rezultă tensiunea de intrare:

$$u_i = \frac{E_1 + Ri}{A_0 + 1}.$$

Tensiunea de ieşire:

$$u_2 = E_1 - u_i = E_1\frac{A_0}{A_0+1} - \frac{R}{A_0+1}i,$$

permite identificarea parametrilor schemei echivalente:

$$E_e = E_1\frac{A_0}{A_0+1},\ R_e = \frac{R}{A_0+1}.$$

Pentru $A_0 \to \infty$ se obţine: $E_e = E_1$, $R_e = 0$, ceea ce evidenţiază caracterul repetor de tensiune al acestui circuit. Presupunând că iniţial tensiunea de ieşire $u_2(0) = 0$, rezultă:

$$u_2(t) = Ae^{-t/\tau} + B,$$

în care $\tau = R_eC$, $A + B = 0$, $B = E_e$, deci:

$$u_2(t) = E_e(1 - e^{-t/\tau}).$$

În consecinţă tensiunea de ieşire nu urmăreşte instantaneu tensiunea de intrare. La aplicarea unei excitaţii treaptă tensiunea de ieşire are o variaţie exponenţială în timpul de creştere $t_r = 2.2\tau = 2.2R_eC$. De exemplu, pentru $R = 100\Omega$, $C = 1mF$, $A_0 = 10^5$, rezultă $R_e = 1m\Omega$, $\tau = R_eC = 1\mu s$, ceea ce corespunde la un timp de creştere de $2.2\mu s$.

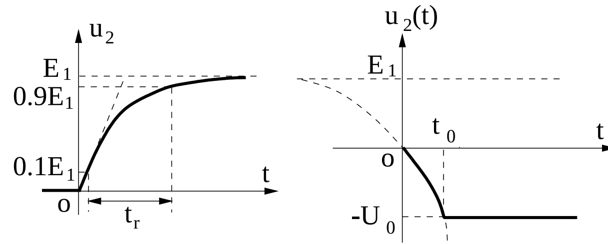


Fig. 4.81.

Dacă amplificatorul are reacţia inversă pozitivă, din punctul de vedere al relaţiilor, acesta corespunde schimbării semnului amplificării în buclă deschisă A_0, ceea ce corespunde la:

$$E_e = E_1\frac{A_0}{A_0-1},\ R_e = -\frac{R}{A_0-1}.$$

Chiar dacă pentru $A_0 \to \infty$, aceşti parametrii tind către aceleaşi valori $E_e = E_1$, $R_e = 0$ ce ar putea conduce la interpretarea ca şi în cazul reacţiei pozitive circuitul funcţionează ca un repetor. Totuşi, valoarea negativă a rezistenţei echivalente R_e, face ca circuitul să aibă o comportare instabilă, iar la o tensiune

de intrare $E_1 > 0$ să apară la ieşire o tensiune $u_2 \to -\infty$ (figura 81). Datorită saturaţiei, în realitate tensiunea de ieşire se limitează la $\pm U_0$. Timpul t_0 în care tensiunea ajunge la valoarea $u_2 = -U_0$ este $t_0 = -\tau \ln (U_0/E_1)$. Se constată că oricât de mică ar fi tensiunea de intrare, tensiunea de ieşire, amplificatorul se saturează inferior sau superior. În concluzie, un amplificator operaţional cu reacţie pozitivă, datorită instabilităţii nu poate funcţiona în zona liniară a caracteristicii.

Circuite excitate cu semnale constante pe porţiuni

Rezultatele obţinute anterior pot fi aplicate şi în cazul unor excitaţii variabile, care se aproximează prin funcţii scară. Presupunând că pe fiecare interval de timp al diviziunii $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$ excitaţiile sunt constante, generatorul echivalent ar avea parametrii R, E_k, pentru $t \in (t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, ...$ În consecinţă variabila de stare va avea evoluţia:

$$x(t) = A_k e^{-(t-t_k)/\tau} + B_k = x_{\infty_k} + (x_{0_k} - x_{\infty_k}) e^{-(t-t_k)/\tau},$$

În care x_{0_k} se determină din condiţia de continuitate a funcţiei $x(t)$ în funcţie de $\lim\limits_{x \to t_k\, t < t_k} x(t)$.

Dacă la momentele t_k au loc comutaţii în circuit este posibil ca pe fiecare interval $t \in (t_k, t_{k+1})$, rezistenţa echivalentă să aibă altă valoare R_k, $k = 0, 1, ...$

Aplicaţia 1

Se consideră cicuitul RLe, în care $R = 10\Omega$, $L = 10mH$, iar $e(t)$ are variaţia reprezentată în figura 82, cu $t_1 = 1ms$, $E_1 = 10V$, $E_2 = -10V$.

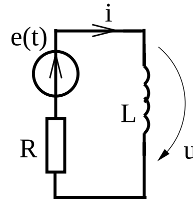


Fig. 4.82.

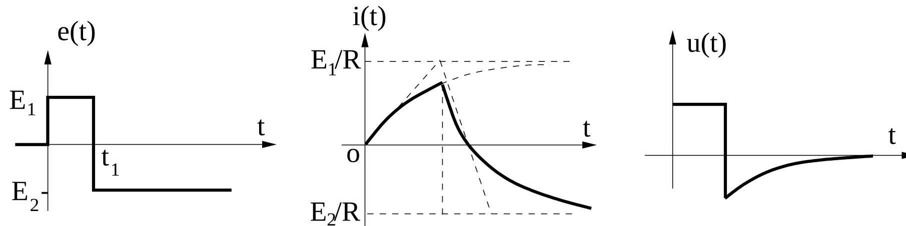


Fig. 4.83.

Deoarece pentru $t < 0$, $e(t) = 0$, curentul iniţial prin bobina are valoarea $i(0) = 0$. Pe primul interval de timp $t \in (0, t_1)$ curentul este:

$$i(t) = A_1 e^{-t/\tau} + B_1,$$

cu $\tau = L/R$, $i(0) = A_1 + B_1 = 0$, $i_\infty = B_1 = E/R$.

Curentul

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = 1 - e^{-t/10^{-3}},$$

are la momentul de timp $t_1 = 1ms$ valoarea $i_1 = i(t_1) = 1 - e^{-1} = 0.63A$, care este condiţia iniţială pentru următorul interval $t > t_1$, în care:

$$i(t) = A_2 e^{-(t-t_1)/\tau} + B_2,$$

cu $i(t_1) = A_2 + B_2 = i_1$, $i_\infty = B_2 = E_2/R$, ceea ce corespunde la:

$$i(t) = \frac{E_2}{R} + \left(i_1 - \frac{E_2}{R}\right) e^{-(t-t_1)/\tau} = -1 + 1.63e^{-(t-t_1)/\tau}.$$

Intensitatea curentului:

$$i(t) = \begin{cases} \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau}),\ 0 < t < t_1 \\ \frac{E_2}{R} + \left(i_1 - \frac{E_2}{R} e^{-(t-t_1)/\tau}\right),\ t > 0, \end{cases}$$

permite determinarea tensiunii la bornele bobinei:

$$u(t) = L\frac{di}{dt}\begin{cases} Ee^{-t/\tau},\ 0 < t < t_1 \\ (E_2 - i_1 R)e^{-(t-t_1)/\tau},\ t > 0, \end{cases}$$

mărimi a căror variaţie în timp sunt reprezentate grafic în figura 83.

Aplicaţia 2

Se consideră aplicaţia din figura 84, în care $E_1 = 20V$, $R_1 = R_2 = 1k\Omega$, $J_2 = 10mA$, $C = 1\mu F$, la care comutatorul k se închide la momentul $t = 0$ şi rămâne închis o durată $t_1 = 1ms$, după care se deschide din nou.

În regimul staţionar anterior momentului iniţial, circuitul admite schema echivalentă din figura 84, în care $u_0 = -R_2 J_2 = -10V$. În regimul staţionar ulterior închiderii comutatorului k circuitul admite schema echivalentă din figura 84, în care $i_1 = (E_1 + R_2 J_2)/(R_1 + R_2) = 15mA$, $u_\infty = E_1 - R_1 i_1 = 5V$.

Pentru intervalul $t \in (0, t_1)$, circuitul rezistiv este echivalent (figura 86) cu o sursa de tensiune cu rezistenţă internă:

$$R_{e_1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 500\Omega,$$

care determină o constantă de timp $\tau_1 = R_{e_1} C = 500\mu s$.

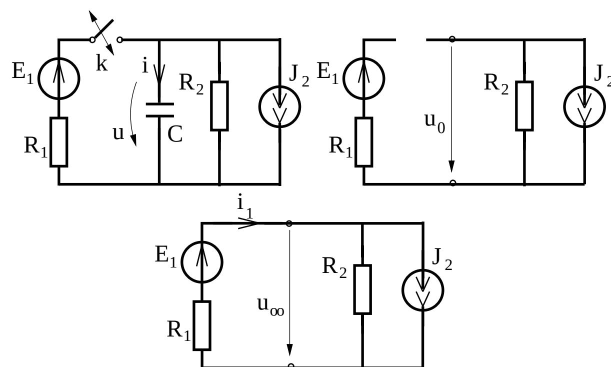


Fig. 4.84.

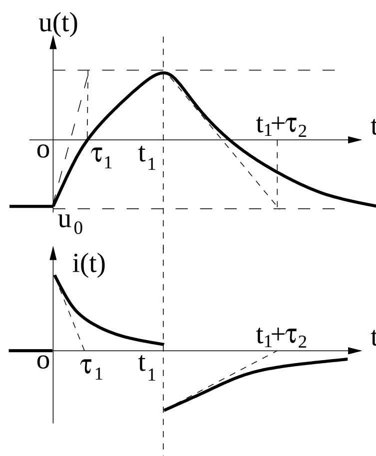


Fig. 4.85.

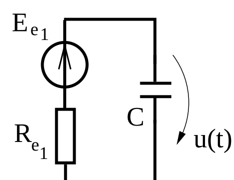


Fig. 4.86.

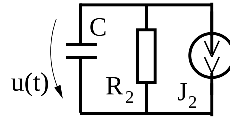


Fig. 4.87.

Tensiunea la bornele condensatorului are, în acest interval, expresia:

$$u(t) = A_1 e^{-t/\tau_1} + B_1,$$

cu $u(0) = A_1 + B_1 = u_0$, $u_\infty = B_1$, deci:

$$u(t) = u_\infty + (u_0 - u_\infty)e^{-t/\tau_1} = 5 - 15e^{-t/\tau_1}.$$

La momentul $t = t_1$ tensiunea are valoarea $u_1 = 5 - 15e^{-2} \cong 3.5V$.

Pentru intervalul $t > t_1$, în care comutatorul k este deschis, rezistenţa echivalentă la bornele condensatorului este R_2 şi constanta de timp $\tau = R_2 C = 1ms$. Tensiunea la bornele condensatorului:

$$u(t) = A_2 e^{-(t-t_1)/\tau_2} + B_2,$$

satisface condiţiile $u(t_1) = A_2 + B_2 = u_1$ şi $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = u_0$, ce conduc la:

$$u(t) = u_0 + (u_1 - u_0)e^{-(t-t_1)/\tau_2} = -10 - 5(1 + 3e^{-2})e^{-(t-t_1)/\tau_2}.$$

Intensitatea curentului prin condensator $i = C\dfrac{du}{dt}$ are variaţia în timp prezentată în figura 85.

Circuite de ordinul unu excitate cu semnale arbitrare

Analizând răspunsul unui circuit liniar cu un singur element acumulator de energie la excitaţie treaptă:

$$x(t) = x_\infty + (x_0 + x_\infty)e^{-t/\tau} = x_0 e^{-t/\tau} + x_\infty(1 - e^{-t/\tau}).$$

Se constată că un circuit electric care conţine elemente acumulatoare de energie poate fi străbătut de curenţi nenuli, chiar în absenta surselor $x_\infty = 0$. Acestea se datorează stării iniţiale nenule $x_0 \neq 0$.

Răspunsul $x(t)$ se poate descompune în doi termeni: $x(t) = x_l(t) + x_f(t)$:

$$x_l(t) = x_0 e^{-t/\tau},$$

$$x_f(t) = x_\infty(1 - e^{-t/\tau}),$$

în care $x_l(t)$ este numită soluţia liberă şi se datorează exclusiv condiţiilor iniţiale şi $x_f(t)$ este numită soluţia forţată şi se datorează excitaţiei.

Soluţia liberă satisface condiţia iniţială $x_l(0) = x_0$ şi evoluează către zero. Această fiind soluţia ecuaţiei diferenţiale omogene, corespunzătoare circuitului cu surse nule, nu va depinde de tipul excitaţiei aplicat circuitului. Soluţia forţată evoluează de la $x_f(0) = 0$, corespunzătoare stării iniţiale nule, către valoarea de regim staţionar x_∞. Soluţia de regim forţat este soluţia ecuaţiei neomogene:

$$a_0 \frac{dx}{dt} + a_1 x = b_0(t),$$

cu $x(0) = 0$ şi depinde de excitaţia aplicată $b_0(t) = e(t)$ sau $j(t)$.

Ecuaţia diferenţială fiind liniară, soluţia ei va depinde liniar de excitaţie.

De exemplu, dacă excitaţia are forma unui impuls dreptunghiular (figura 88), răspunsul este:

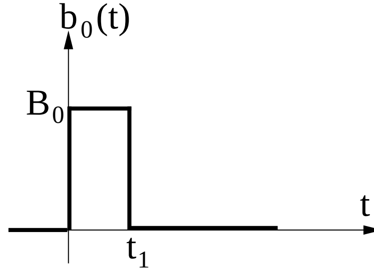


Fig. 4.88.

$$x(t) = \begin{cases} \frac{B_0}{a_1}(1 - e^{-t/\tau}),\ t \in (0, t_1) \\ x_1 e^{-(t-t_1)/\tau},\ t > t_1, \end{cases}$$

cu $x_1 = (B_0/a_1)(1 - e^{-t1/\tau})$.

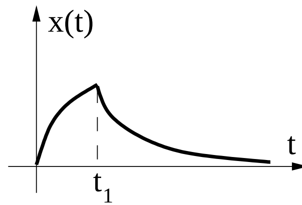


Fig. 4.89.

La limită dacă $t_1 \to 0$ şi $B_0 \to \infty$, astfel încât $t_1 B_0 = 1$ (figura 90), ceea ce corespunde unei excitaţii de tip impuls Dirac $b_0(t) = \delta(t)$:

$$\lim_{t_1 \to 0} x_1 = \lim_{t_1 \to 0} \frac{1}{a_1 t_1} \left(1 - e^{-t1/\tau}\right) = \frac{1}{a_1 \tau} = \frac{1}{a_0},$$

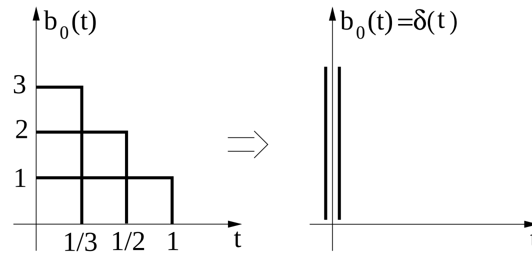


Fig. 4.90.

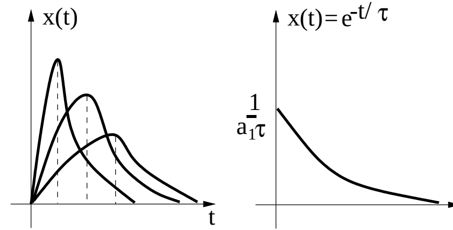


Fig. 4.91.

iar răspunsul devine:

$$x(t) = \frac{1}{a_0} e^{-t/\tau}.$$

Se constată că răspunsul liber al circuitului are aceeasi expresie, dacă $x_0 = 1/a_0$. În consecinţă, orice stare iniţială x_0 nenulă este echivalentă din punctul de vedere al răspunsului cu o excitaţie $a_0\delta(t)$ aplicată unui circuit cu stare iniţiala nulă.

Acest lucru nu este întâmplător, conform teoremei de echivalentă pentru condiţiile iniţiale, un element acumulator de energie cu stare iniţială nenulă este echivalent cu elementul în stare iniţială nulă conectat cu o sursă impuls Dirac.

Deoarece orice semnal de excitaţie admite reprezentarea:

$$b_0(t) = \int_0^t b_0(t')\delta(t-t')dt',$$

datorită liniarităţii ecuaţiei, soluţia de regim forţat datorată acestei excitaţii va fi:

$$x_f(t) = \frac{1}{a_0}\int_0^t b_0(t')e^{-(t-t')/\tau}dt'.$$

Răspunsul circuitului liniar de ordinul unu la excitaţie arbitrară $b_0(t)$ şi stare iniţială x_0, este:

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) = x_0 e^{-t/\tau} + \frac{1}{a_0} e^{-t/\tau} \int_0^t b_0(t') e^{-t'/\tau} dt'.$$

Derivata funcţiei $x(t)$ este:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x_0}{\tau} e^{-t/\tau} - \frac{1}{a_0 \tau} e^{-t/\tau} \int_0^t b_0'(t') e^{-t'/\tau} dt' + \frac{1}{a_0} e^{-t/\tau} b_0(t) e^{-t'/\tau}.$$

şi se verifică uşor că $x(t)$ satisface ecuaţia:

$$a_0 \frac{dx}{dt} + a_1 x = b_0(t),$$

şi condiţia iniţială $x(0) = x_0$. Fiind soluţia unică a acestei ecuaţii este şi problema problemei.

Condiţia ca două elemente dipolare de circuit să fie echivalente este ca ele să aibă acelaşi răspuns pentru o excitaţie comună, arbitrară. Circuitele de ordinul unu sunt echivalente dacă au aceeaşi comportare în regim staţionar, au aceeaşi constantă de timp şi stare iniţială identică.

Aplicând rezultatul obţinut la circuitul RLe serie se obţine următoarea expresie a curentului:

$$i(t) = i_0 e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \int_0^t \frac{e(t')}{R} e^{-t'/\tau} dt',$$

în care $\tau = L/R$. În cazul circuitului RCe serie tensiunea la bornele condensatorului este:

$$u(t) = u_0 e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \int_0^t e(t') e^{-t'/\tau} dt'.$$

Aplicaţia 1

Considerând circuitul din figura 92, în care:

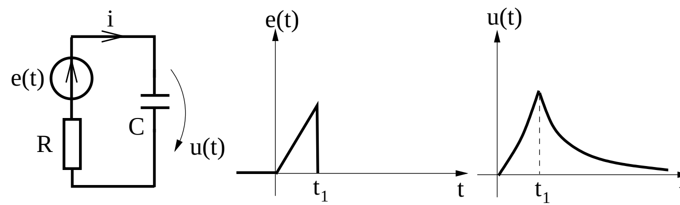


Fig. 4.92.

$$e(t) = \begin{cases} at, \; t \in (0, t_1) \\ 0, \; t > t_1, \end{cases}$$

iar condensatorul este iniţial descărcat.

Tensiunea la bornele condensatorului este, pentru $t < t_1$:

$$u(t) = \frac{a}{\tau}e^{-t/\tau}\int_0^t t'e^{-t'/\tau}dt' = \frac{a}{\tau}e^{-t/\tau}[\tau t e^{-t/\tau} - \tau\int_0^t e^{-t'/\tau}dt'] = a(t - \tau + \tau e^{-t/\tau}).$$

Pentru $t > t_1$:

$$u(t) = \frac{a}{\tau}e^{-t/\tau}\int_0^{t_1} t'e^{-t'/\tau}dt' = ae^{-t/\tau}[(t_1 - \tau)e^{t_1/\tau} + \tau].$$

Circuite neliniare cu un element acumulator de energie

Se consideră un circuit electric alcătuit din surse de tensiune, surse de curent, rezistoare liniare sau neliniare, la bornele căruia se află un element liniar acumulator de energie: bobină sau condensator (figura 93).

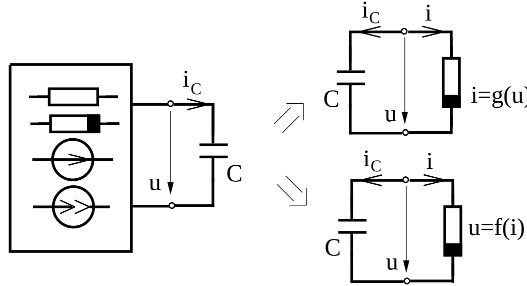


Fig. 4.93.

Presupunând sursele cu parametrii constanţi în timp partea rezistivă a circuitului se poate echivala cu un rezistor neliniar controlat în tensiune sau în curent.

Pentru a simplifica analiza se presupune că rezistorul neliniar are caracteristica liniară pe porţiuni.

Modul în care variază tensiunea $u(t)$ se obţine prin rezolvarea ecuaţiilor:

$$i_C = C\frac{du}{dt} \Rightarrow i = -i_C = -C\frac{du}{dt} \Rightarrow i = g(u),$$

cu condiţia iniţială $u(0) = u_0$, sau

$$C\frac{du}{dt} = -g(u),$$

perechea u, i fiind coordonatele unui punct din graficul funcţiei $g(u)$. Circuitul se află în regim dinamic atât timp cât $i \neq 0$.

Din analiza acestei relaţii rezultă că dacă $i = g(u) > 0$ atunci $u(t)$ este descrescător, iar dacă $i = g(u) < 0$, atunci tensiunea trebuie să scadă în timp. Această observaţie permite stabilirea sensului în care evoluează punctul de funcţionare pe caracteristica neliniară u - i. Deplasarea acestui punct se face până la indeplinirea condiţiei $i = 0$, corespunzând punctului de echilibru.

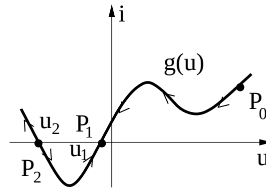


Fig. 4.94.

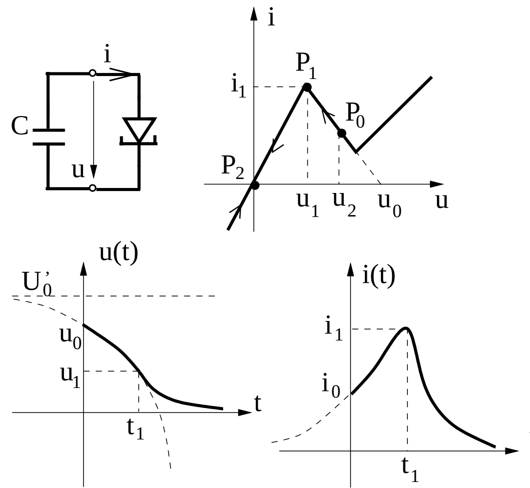


Fig. 4.95.

De exemplu, din caracteristica neliniară reprezentată în figura 94, rezultă că pentru orice P_0 cu $u > u_1$, circuitul evoluează către starea finală P_1. Tot spre P_1 evolează circuitul, dacă $u_0 \in (u_2, u_1)$. Rezultă că P_1 este un punct de echilibru stabil. În schimb P_2 este un punct de echilibru instabil.

În general, punctele de intersecţie ale caracteristicii cu axa tensiunii sunt puncte de echilibru, cele la care rezistenţa dinamică este pozitivă sunt puncte de echilibru stabil, în caz contrar sunt puncte de echilibru instabil.

Aplicaţia 1

Se va analiza descărcarea unui condensator pe o diodă tunel (figura 95).

Considerând tensiunea iniţială a condensatorului corespunzătoare punctului P_0 plasat pe porţiunea de caracteristică cu rezistenţă dinamică R_{d_1} negativă, curba va evolua către P_1 şi ulterior pe porţiunea cu $R_{d_2} > 0$ către punctul de echilibru final P_2.

Pe primul interval de timp $P \in (P_0, P_1)$ curentul şi tensiunea vor evolua exponenţial instabil cu $\tau = R_{d_1} C < 0$. Durata acestei tranziţii este:

$$t_1 = \tau_1 \ln \frac{u_0 - u_0'}{u_1 - u_0'},$$

Evoluţia de la P_1 la P_2 se face exponenţial stabil:

$$u(t) = u_1 e^{-t/\tau_2},\ i(t) = i_1 e^{-t/\tau_2},$$

iar constanta de timp: $\tau_2 = R_{d_2} C > 0$.

Într-o manieră asemănătoare se trateaza şi cazul bobinei conectate la bornele unui rezistor neliniar controlat în curent (figura 96).

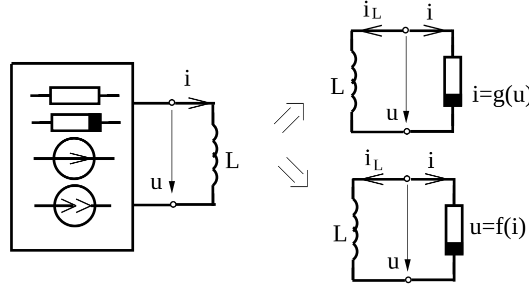


Fig. 4.96.

Ecuaţiile acestui circuit

$$u = L\frac{di_L}{dt},\ -i_L = i,\ u = f(i),$$

permit obţinerea unei ecuaţii similare:

$$L\frac{di}{dt} = -f(i),$$

cu condiţia iniţială $i(0) = i_0$.

De această dată, punctul de echilibru corespunde condiţiei $u = 0$. Dacă $u > 0$, atunci $i(t)$ trebuie să scadă în timp, iar dacă $u < 0$, atunci $i(t)$ trebuie să crească în timp.

În acest caz, punctele de intersecţie ale caracteristicii cu axa curentului sunt puncte de echilibru, stabil dacă rezistenţa dinamică în ele este pozitivă şi instabil în caz contrar.

Analizând graficul caracteristicii neliniare $u = f(i)$ din figura 97 se constată că punctele P_1 şi P_3 sunt puncte de echilibru stabil, iar P_2 este un punct de echilibru instabil. Dacă $i_0 > i_2$ atunci curentul va evolua către valoarea finală $i_\infty = i_3$, iar dacă $i_0 < i_2$, atunci valoarea asimptotică va fi $i_\infty = i_1$.

Aproximând caracteristica $f(i)$ liniar pe porţiuni, funcţiile $i(t)$ şi $u(t)$ admit pe diferite intervale de timp expresii de forma $Ae^{-t/\tau} + B$, în care $\tau = L/R_d$ iar constantele A şi B se determină din condiţiile iniţiale şi cele asimptotice.

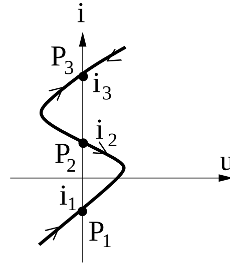


Fig. 4.97.

Analiza circuitelor cu un condensator conectat la un rezistor neliniar controlat în curent precum şi a circuitelor cu o bobină conectată la bornele unui rezistor neliniar controlat în tensiune ridică dificultăţi suplimentare.

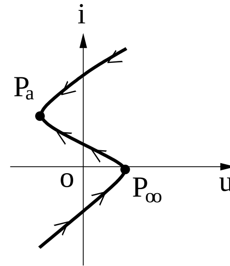


Fig. 4.98.

Fie circuitul capacitiv neliniar de ordinul unu, cu o caracteristică $u = f(i)$.

$$i = -i_C = -C\frac{du}{dt},\ u = f(i),$$

Punctul unic de echilibru corespunde condiţiei $i = 0$. Dacă $i > 0$, atunci $u(t)$ trebuie să scadă în timp, iar dacă $i < 0$, atunci $u(t)$ trebuie să crească în timp.

Analizând caracteristica din figura 99, rezultă că P_e este un punct de echilibru stabil şi că starea circuitului va evolua asimptotic către acest punct indiferent de starea iniţială P_0. Dacă $u_0 < u_2$, atunci evoluţia are loc direct către P_e prin P_2'. În schimb dacă, intensitatea curentului în starea iniţială $i_0 > i_1$, atunci se constată că punctul de funcţionare evoluează de la P_0 către punctul P_2. Punctul P_2 este un punct de impas, deoarece ajuns aici, circuitul nu poate rămâne în acestă stare, în care $i \neq 0$. Se constată că punctul de funcţionare are un salt din P_2 în P_2', salt care este însoţit de o discontinuitate în curent, dar nu şi în tensiunea la bornele condensatorului. Din P_2' punctul de funcţionare evoluează către starea finală de echilibru P_e. Un astfel de circuit cu o singură stare de echilibru se numeşte circuit monostabil. Analizând caracteristica neliniară din figura 99 se constată că P_e este

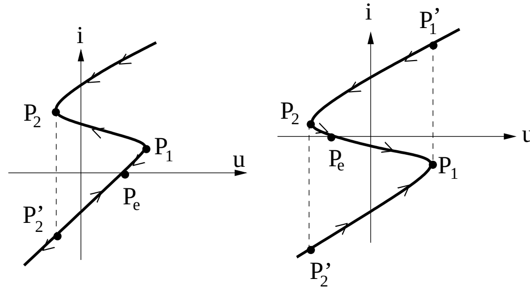


Fig. 4.99.

unicul punct de echilibru, dar el este instabil, iar punctele P_1 şi P_2 sunt puncte de impas. În consecinţă indiferent de ce stare iniţială $P_0 \neq P_e$ are circuitul, acesta va evolua pe traseul P_1 - P_1' - P_2 - P_2' ciclul reluându-se la nesfârşit.

Un astfel de circuit la care mărimile $u(t)$ şi $i(t)$ au o variaţie periodică în timp se numeşte circuit astabil.

Şi în cazul circuitelor cu o bobină conectată la bornele unui circuit rezistiv neliniar, controlat în tensiune, există un singur punct de echilibru $u = 0$, $i = g(u)$. Acesta poate fi stabil, dacă $g'(t) > 0$ sau instabil, dacă conductanţa dinamică este negativă în acest punct. Când punctul de funcţionare ajunge într-un punct de impas, în acest caz are doar un salt orizontal, până la un alt punct al caracteristicii, care are acelaşi curent. Acest salt corespunde unei variaţii discontinui a tensiunii la bornele bobinei, dar cu păstrarea continuităţii funcţiei $i(t)$.

Aplicaţia 2: Oscilatorul de relaxare.

Circuitul alcătuit dintr-un condensator şi un INIC realizat cu un amplificator operaţional (figura 100) are caracteristica din figura 101.

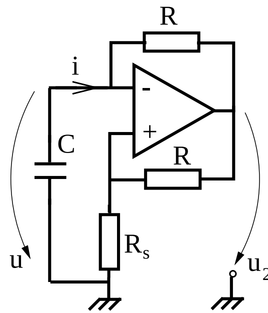


Fig. 4.100.

Acest circuit are originea O ca punct de echilibru instabil, iar punctele P_1 şi P_2 puncte de impas. Punctul de funcţionare va evolua ciclic pe traseul P_1 - P_1' - P_2 - P_2'. Segmentele P_1' - P_2 şi P_2' - P_1 corespund saturaţiei inferioare şi

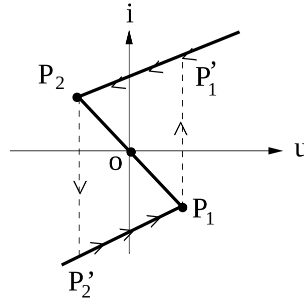


Fig. 4.101.

respectiv superioare amplificatorului operaţional ceea ce determină la ieşire un semnal dreptunghiular periodic.

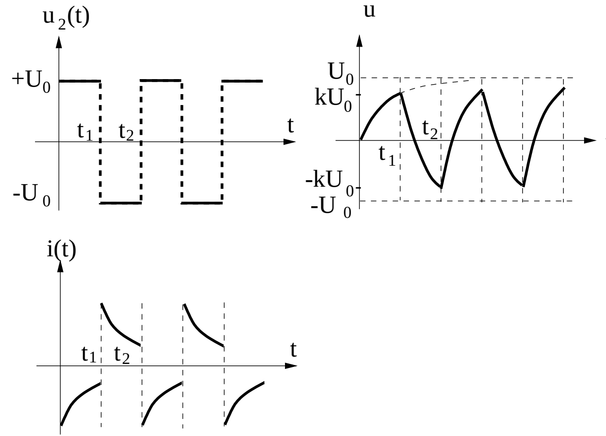


Fig. 4.102.

Presupunând pentru început că amplificatorul este saturat superior, $u_2 = U_0$, potenţialul bornei + a amplificatorului operaţional are expresia:

$$V_1 = U_0 \frac{R_s}{R + R_s} = kU_0,$$

determinată cu relaţia divizorului de tensiune. Condensatorul C va avea la borne o tensiune:

$$V_{-} = u(t) = Ae^{-t/\tau} + B,$$

cu $\tau = RC$ şi $u_\infty = B = U_0$. Presupunând condensatorul C iniţial descărcat, rezultă $u(0) = A + b = 0$:

$$u(t) = U_0(1 - e^{-t/\tau}).$$

Tensiunea de intrare $u_i = V_+ - V_-$ este pozitivă până la momentul t_1 la care:

$$U_0(1 - e^{-t_1/\tau}) = U_0\frac{R_s}{R + R_s},$$

$$t_1 = \tau \ln\frac{R + R_s}{R}.$$

În acest moment amplificatorul operaţional trece din starea saturat superior în starea saturat inferior (are loc saltul P_1 - P_1'). În continuare tensiunea la bornele condensatorului va evolua descrescător de la $u(t_1) = kU_0$ spre $-U_0$ dar la momentul t_2, la care $u(t_2) = -kU_0$ are loc o nouă tranziţie. Astfel încât:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \tau \ln\frac{kU_0 + U_0}{-kU_0 + U_0} = \tau \ln\frac{1 + k}{1 - k} = \tau \ln\left(1 + 2\frac{R_s}{R}\right),$$

reprezintă semiperioada oscilaţiilor.

În concluzie, acest circuit alcătuit cu un singur element acumulator de energie, numit oscilator de relaxare, nu are un regim limită staţionar şi va oscila permanent cu perioada $T = 2\Delta t$.

Aplicaţia 3: Circuit bistabil cu bobină şi amplificator operaţional.

4.12 Circuite electrice liniare cu două elemente acumulatoare de energie

Se consideră un circuit electric alcătuit din rezistoare, surse ideale de tensiune şi de curent, care conţine şi două elemente acumulatoare de energie. Se deosebesc trei cazuri (figura 103):

- circuite cu două bobine;
- circuite cu două condensatoare;
- circuite cu o bobină şi un condensator.

Circuitul cu două bobine are ecuaţiile:

$$u_1 = -L_1\frac{di_1}{dt},\ u_2 = -L_2\frac{di_2}{dt},$$

iar partea rezistivă liniară şi activă, presupusă controlabilă în curent, ar fi caracterizată prin ecuaţiile:

$$u_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2 + e_1,$$

$$u_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2 + e_2,$$

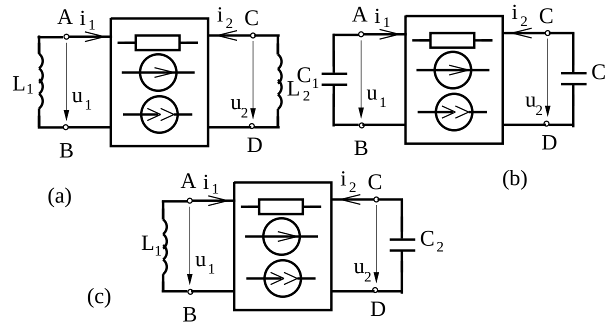


Fig. 4.103.

în care $e_1 = u_{AB0}$ şi $e_2 = u_{CD0}$ reprezintă tensiunile de mers în gol, pentru regimul $i_1 = i_2 = 0$, la cele două porţi AB şi respectiv CD.

Cele patru rezistenţe: de intrare r_{11}, de ieşire r_{22} şi de transfer r_{12}, r_{21} reprezintă elementele unei matrice pătrate şi simetrice $r_{12} = r_{21}$, dacă circuitul rezistiv nu conţine surse comandate. Deoarece s-a adoptat pentru circuitul rezistiv regula de la receptoare, matricea r este pozitiv definită şi $r_{11} > 0$, $r_{22} > 0$, dacă circuitul rezistiv pasivizat este alcătuit doar din rezistoare pasive, cu rezistenţe pozitive.

Eliminând tensiunile de la bornele celor două bobine, se obţine sistemul de ecuaţii diferenţiale liniare, de ordinul întâi cu coeficienţi constanţi:

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{r_{11}i_1 + r_{12}i_2 + e_1}{L_1},$$

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{r_{21}i_1 + r_{22}i_2 + e_2}{L_2}.$$

Circuitul cu două condensatoare este caracterizat prin ecuaţiile:

$$i_1 = -C_1\frac{du_1}{dt},\ i_2 = -C_2\frac{du_2}{dt},$$

caracteristice părţii reactive şi

$$i_1 = g_{11}u_1 + g_{12}u_2 + j_1,$$

$$i_2 = g_{21}u_1 + g_{22}u_2 + j_2,$$

caracteristice părţii rezistive, presupusă controlabilă în tensiune. În aceste ecuaţii $j_1 = i_{sc_{AB}}$ şi $j_2 = i_{sc_{CD}}$ reprezintă curenţii de scurtcircuit produşi de sursele din circuitul rezistiv la cele două porţi AB şi CD.

Prin eliminarea curenţilor i_1 şi i_2 se obţine sistemul de ecuaţii diferenţiale liniare, de ordinul întâi cu coeficienţi constanţi:

$$\frac{du_1}{dt} = -\frac{g_{11}u_1 + g_{12}u_2 + j_1}{C_1},$$

$$\frac{du_2}{dt} = -\frac{g_{21}u_1 + g_{22}u_2 + j_2}{C_2}.$$

Dacă în primul caz soluţia ecuaţiilor diferenţiale era reprezentată de curenţii din bobine, în acest caz, soluţia este constituită de tensiunile la bornele condensatoarelor. Aceste semnale electrice constituie variabilele de stare ale circuitului analizat, iar ecuaţiile diferenţiale satisfăcute se numesc ecuaţiile variabilelor de stare.

Pentru obţinerea ecuaţiilor variabilelor de stare într-un circuit cu o bobină şi un condensator se folosesc ecuaţiile elementelor acumulatoare de energie:

$$u_1 = -L_1\frac{di_1}{dt},\ i_2 = -C_2\frac{du_2}{dt},$$

şi cele ale părţii rezistive, caracterizare hibridă:

$$u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}u_2 + e_1,$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}u_2 + j_2,$$

iar prin eliminarea variabilelor u_1 şi i_2:

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{h_{11}i_1 + h_{12}u_2 + e_1}{L_1},$$

$$\frac{du_2}{dt} = -\frac{h_{21}i_1 + h_{22}u_2 + j_2}{C_2}.$$

Şi în acest caz variabilele de stare reprezintă tensiunile la bornele condensatoarelor şi curenţii din bobine.

Indiferent de cazul considerat, ecuaţiile variabilelor de stare au forma:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + y_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + y_2,$$

în care a_{11}, a_{12}, a_{21}, $a_{22} \in \mathbb{R}$, iar x_1, x_2, y_1 şi y_2 sunt funcţii de timp, definite pe intervalul $t > 0$ şi cu valori în $\mathbb{R}$. Deoarece circuitele cu două elemente acumulatoare de energie sunt caracterizate de un sistem de două ecuaţii diferenţiale, ele se numesc şi circuite de ordinul doi.

Folosind notaţia matriceal - vectorială:

$$x = [x_1,\, x_2]^T,\ y = [y_1,\, y_2]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

ecuaţiile variabilelor de stare capată formă compactă:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + y,$$

în care x reprezintă vectorul variabilelor de stare, y reprezintă excitaţiile (efectul surselor văzut pe la bornele elementelor acumulatore de energie), iar $A \in \mathbb{R}^{2x2}$ este o matrice pătrată, caracteristică sistemului analizat cu elemente date de parametrii R, L, C din circuit.

Pentru determinarea evoluţiei în timp a variabilelor de stare trebuie rezolvată ecuaţia variabilelor de stare, a cărei soluţie este determinată univoc, doar dacă se cunosc valorile condiţiilor iniţiale:

$$x(0) = x_0,$$

respectiv curenţii prin bobine şi tensiunile la bornele condensatoarelor, în momentul iniţial $t = 0$.

Rezolvarea sistemului variabilelor de stare se va face prin eliminare. Derivând prima ecuaţie se obţine (cu notaţia $x' = \frac{dx}{dt}$):

$$x_1'' = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + y_1',$$

şi înlocuind $x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + y_2$, rezultă:

$$x_1'' = a_{11}x_1' + a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 + a_{12}y_2 + y_1',$$

Exprimând $x_2 = (x_1' - a_{11}x_1 - y_1)/(a_{12})$, din prima ecuaţie, rezultă în final:

$$x_1'' - (a_{11} + a_{12})x_1' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = y_1' - a_{22}y_1 + a_{12}y_2.$$

Cea de a doua variabilă de stare satisface o ecuaţie asemănătoare:

$$x_2'' - (a_{11} + a_{12})x_2' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = y_2' - a_{11}y_2 + a_{21}y_1.$$

Cele două variabile de stare satisfac ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul doi cu coeficienţi constanţi de forma:

$$x'' - Tx' + Dx = f,$$

în care $T = a_{11}+a_{22}$ reprezintă urma matricei A, iar $D = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ reprezintă determinantul matricei A. Termenul liber f reprezintă excitaţiile circuitului.

Coeficienţii ecuaţiei diferenţiale se notează deseori cu $T = -2\alpha$, $D = \omega_0^2$:

$$x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x = f,$$

în care $\alpha = -T/2$ se numeşte coeficient de amortizare, iar $\omega_0 = \sqrt{D}$ se numeşte pulsaţie de rezonanţă.

Soluţia ecuaţiei diferenţiale de ordinul doi satisfăcută de o variabilă de stare se caută sub forma:

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t),$$

în care $x_g(t)$ este soluţia generală a ecuaţiei omogene:

$$x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x = 0,$$

iar $x_p(t)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene. Dacă în particular, excitaţia f este constantă în timp, atunci ecuaţia neomogenă admite ca soluţie particulară $x_p(t) = f/(\omega_0^2)$.

Pentru determinarea soluţiei generale a ecuaţiei neomogene se utilizează ecuaţia caracteristică:

$$r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 r^2 = 0,$$

care este o ecuaţie de gradul doi, cu rădăcinile:

$$r_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2},\ r_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

Se verifică uşor că aceste rădăcini sunt chiar valorile proprii ale matricei A:

$$Ax = \lambda x,$$

care se calculează din ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

deci $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$, ceea ce corespunde cu:

$$\lambda_2 - T\lambda + D = 0.$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene are expresia:

$$x_g(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t},$$

ceea ce corespunde expresiei:

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + x_p(t),$$

pentru evoluţia în timp a variabilei de stare cu $x_p(t) = f/(\omega_0^2)$, în cazul particular al exitaţiei constante.

Pentru analiza calitativă a modului în care evoluează în timp o variabilă de stare la un circuit de ordinul doi se vor discuta ecuaţia caracteristică.

Dacă rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt reale şi negative se introduc notaţiile:

$$r_1 = -\frac{1}{\tau_1},\ r_2 = -\frac{1}{\tau_2},$$

care evidenţiază că un astfel de circuit are două constante de timp τ_1 şi τ_2, iar regimul tranzitoriu, de evoluţie de la o stare iniţială către o stare finală staţionară:

$$x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t) = x_p(t) = \frac{f}{\omega_0^2},$$

care există în cazul excitaţiilor constante, se face după relaţia:

$$x(t) = A_1 e^{-t/\tau_1} + A_2 e^{-t/\tau_2} + x_\infty.$$

Constantele de integrare A_1 şi A_2 se determină din condiţiile iniţiale:

$$x(0) = A_1 + A_2 + x_\infty,\ x'(0) = -\frac{A_1}{\tau_1} - \frac{A_2}{\tau_2},$$

iar starea asimptotică finală x_∞ se determină prin studiul regimului staţionar posterior regimului tranzitoriu, deci prin analiza circuitului rezistiv (R, E, J) obţinut prin înlocuirea bobinelor cu conductoare perfecte şi a condensatoarelor prin izolatoare perfecte.

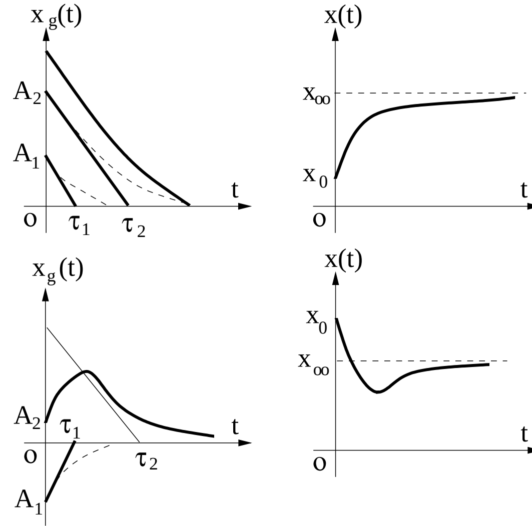


Fig. 4.104.

În figura 104 se reprezintă câteva moduri tipice de variaţie în timp a unei variabile de stare la un circuit de ordinul doi. Se constată că regimul tranzitoriu are un caracter aperiodic (cu cel mult un singur punct de extremum), uneori

monoton şi că el durează practic un timp de $3 \div 4$ ori mai mare decât cea mai mare constantă de timp a circuitului.

Regimul aperiodic al unui circuit electric are loc atunci când ecuaţia sa caracteristică are determinantul pozitiv, deci $T^2 > 4D$, respectiv $\alpha > \omega_0$ coeficientul de amortizare mai mare decât pulsaţia de rezonanţă.

Aceste afirmaţii sunt valabile dacă cele două rădăcini reale sunt negative, ceea ce implică $-\alpha + \sqrt{\alpha_2 - \omega_0^2} < 0$, deci $\alpha > \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} > 0$.

Dacă urma T a matricei A nu este negativă sau determinantul D nu este pozitiv, atunci coeficientul de amortizare devine negativ, iar circuitul are o funcţionare instabilă. În consecinţă, dacă cel putin una din rădăcinile caracteristice ale ecuaţiei caracteristice este pozitivă atunci, regimul tranzitoriu nu are o durată limitată, iar variabila de stare creşte namărginit în timp.

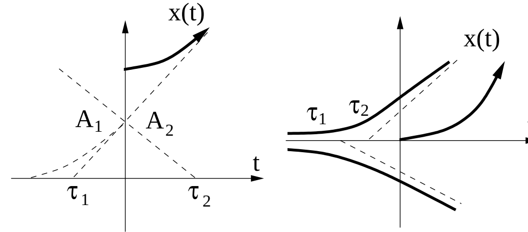


Fig. 4.105.

În cazul în care determinantul ecuaţiei caracteristice este negativ, rădăcinile acesteia sunt complexe şi conjugate, deoarece ecuaţia are coeficienţi reali.

Notând cu $j = \sqrt{-1}$ unitatea imaginară, rezultă:

$$r_1 = -\alpha + j\omega,\ r_2 = -\alpha - j\omega,$$

în care $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ se numeşte pulsaţie proprie.

În acest caz:

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + x_\infty = e^{-\alpha t}(A_1 e^{j\omega t} + A_2 E^{-j\omega t}) + x_\infty,$$

şi folosind relaţiile Euler:

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t,\ e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t,$$

rezultă:

$$x(t) = (B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t)e^{-\alpha t} + x_\infty.$$

Constantele de integrare B_1 şi B_2 se determină din condiţiile iniţiale $x(0) = B_1 + x_\infty$ şi $x\prime(0) = -\omega B_2 - \alpha B_1$, iar starea asimptotică x_∞ din studiul circuitului în regim staţionar.

În acest caz se constată că variabila de stare are o evoluţie oscilant amortizată cu pulsaţia ω şi cu coeficientul de amortizare $\alpha = 1/\tau$. În figura 106 se prezintă:

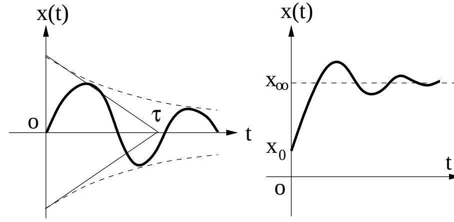


Fig. 4.106.

moduri tipice de evoluţie a variabilelor de stare în cazul $\omega_0 > \alpha$, în ipoteza că partea reala a radacinilor ecuatiei caracteristice este negativa (coeficientul de amortizare $\alpha > 0$).

Regimul tranzitoriu are o durată limitată, practic după 3-4 constante de timp $\tau = \frac{1}{\alpha}$ se atinge starea staţionară posterioară regimului tranzitoriu. Dacă în schimb urma T a matricei este pozitivă, coeficientul de amortizare este negativ iar circuitul are o funcţionare instabilă, oscilaţiile de pulsaţie ω cu amplitudine crescătoare nemărginit în timp (fig. 107.b).

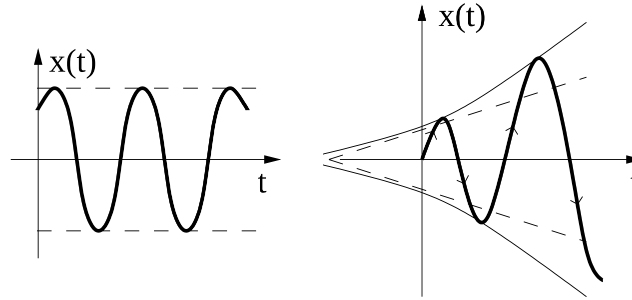


Fig. 4.107.

În cazul limită, în care rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt pur imaginare ($\alpha = 0$ şi $T = 0$) variabila de stare are o evoluţie oscilantă neamortizată:

$$x(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t + x_\infty$$

ca în figura 107.a.

Un alt caz special are loc atunci când determinatul ecuaţiei caracteristice este nul. În această situaţie, rădăcinile acestei ecuaţii sunt confundate şi obligatoriu reale. Dacă valoarea comună este negativă, atunci circuitul are o comportare stabilă, variabilele de stare având evoluţia conform funcţiei:

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 t e^{r_2 t} + x_\infty = (A_1 + A_2) e^{-t/\tau} + x_\infty,$$

circuitul fiind caracterizat de o singură constantă de timp $\tau = -1/r_2 = -1/r_2$.

În aces caz se spune că circuitul este în regim critic, evoluţia variabilei de stare fiind la frontieră între evoluţia aperiodică şi cea oscilant amortizată (fig. 108).

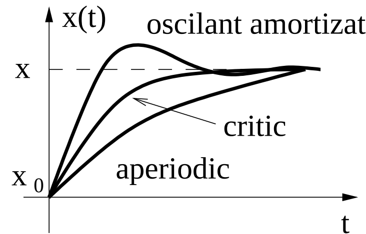


Fig. 4.108.

În cazul în care valoarea comună a rădăcinilor este pozitivă, variabilele de stare au o evoluţie nemărginită pentru $t > 0$, circuitul având un caracter instabil.

În cazul degenerat $r_1 = r_2 = 0$, variabila de stare are expresia:

$$x(t) = A_1 + A_2 t + x_\infty$$

deci este nemărginită.

În concluzie, circuitele electrice liniare cu două elemente acumulatoare de energie se pot clasifica în următoarele catogorii:

- circuite stabile (cu rădăcinile în semiplanul stâng)
  - cu regim aperiodic (rădăcini reale, distincte şi negative);
  - în regim critic (rădăcini confundate, negative);
  - în regim oscilant amortizat (rădăcini complex conjugate cu parte reală negativă);
- circuite oscilante neamortizate (cu rădăcini pur imaginare);
- circuitele instabile (cu rădăcini în semiplanul drept).

În figură se prezintă pozitiţia rădăcinilor ecuaţiei caracteristice pentru diferite categorii de circuite de ordinul doi. Partea imaginară a rădăcinilor caracteristice când este nenulă este egală cu ω, deci are semnificaţia pulsaţiei proprii a oscilaţiilor care apar la trecerea de la o stare la alta. Partea reală este $-\alpha = -1/\tau$ deci are semnificaţia inversei opuse constantei de timp. La circuitele stabile, cu cât constanta de timp este mai mare, cu atât rădăcina este mai apropiată de origine.

Aplicaţia 1: Descărcarea a două condensatoare pe o reţea rezistivă.

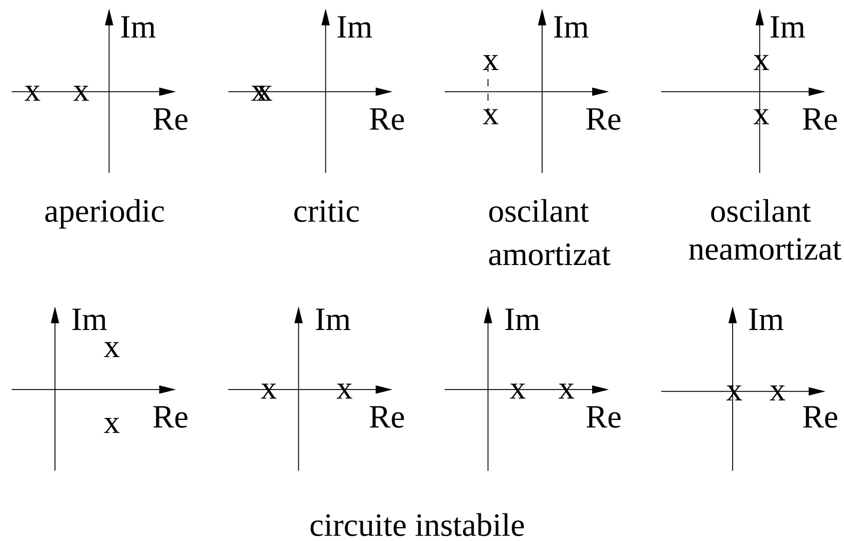


Fig. 4.109.

Se consideră două condensatoare de capacităţile C_1 şi C_2, încărcate iniţial cu tensiunile u_{10} şi respectiv u_{20}.

Se urmăreşte determinarea evoluţiei tensiunii celor două condensatoare în urma conectării lor la o reţea alcătuită din rezistoare pasive.

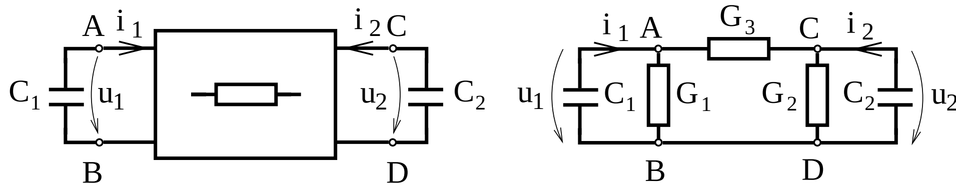


Fig. 4.110.

După cum s-a arătat, un circuit cuadripolar rezistiv este echivalent cu un circuit în conexiune triunghi (fig. 110) şi are matricea conductanţelor:

$$g = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix}$$

În consecinţă matricea sistemului variabilelor de stare este:

$$A = \begin{bmatrix} -(G_1 + G_3)/C_1 & G_3/G_1 \\ G_3/C_2 & -(G_2 + G_3)/C_2 \end{bmatrix}$$

cu urma şi determinantul:

$$T = -\frac{G_1 + G_3}{C_1} - \frac{G_2 + G_3}{C_2} < 0$$

$$D = \frac{(G_1 + G_3)(G_2 + G_3)}{C_1C_2} + \frac{G_3^2}{C_1C_2} > 0$$

Matricea g fiind simetrică şi pozitiv definită are valorile proprii reale şi negative pentru matricea A. În consecinţă există două constante de timp pozitive τ_1 şi τ_2 iar tensiunile la bornele celor două condensatoare au o evoluţie aperiodică stabilă:

$$u_1(t) = B_{11}e^{-t/\tau_1} + B_{12}e^{-t/\tau_2}$$
$$u_2(t) = B_{21}e^{-t/\tau_1} + B_{22}e^{-t/\tau_2}$$

Cele patru constante de integrare se determină din ecuaţiile iniţiale, prin rezolvarea sistemului liniar:

$$\begin{aligned}
u_1(0) &= B_{11} + B_{12} = u_{10}\\
u_2(0) &= B_{21} + B_{22} = u_{20}\\
u_1'(0) &= -\tfrac{B_{11}}{\tau_1} - \tfrac{B_{12}}{\tau_2} = -\tfrac{G_1+G_3}{C_1}u_{10} + \tfrac{G_3}{C_1}u_{20}\\
u_2'(0) &= -\tfrac{B_{21}}{\tau_1} - \tfrac{B_{22}}{\tau_2} = \tfrac{G_3}{C_2}u_{10} - \tfrac{G_2+G_3}{C_2}u_{20}
\end{aligned}$$

Se constată că cele două constante de timp τ_1 şi τ_2 nu pot fi asociate fiecare câte unui condensator, expresiile lor conţinând fiecare capacităţile ambelor condensatoare C_1 şi C_2.

Separarea are loc, doar atunci când $G_3 = 0$, ceea ce corespunde la două circuite de ordinul întâi cu constantele de timp:

$$\tau_1 = C_1/G_1,\ \tau_2 = C_2/G_2,$$

cu soluţia:

$$u_1(t) = u_{10}e^{-t/\tau_1},\ u_2(t) = u_{20}e^{-t/\tau_2}.$$

Alte cazuri degenerate, care prezintă interes constau în conectarea celor două condesatoare în serie şi respectiv în paralel (fig. 111).

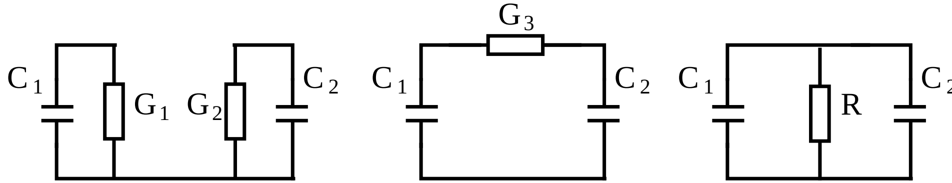


Fig. 4.111.

Conectarea în serie a celor două condesatoare corespunde cazului $G_1 = G_2 = 0$, matricea A având în acest caz determinantul nul $D = 0$ şi urma $T = -G_3/C_1 - G_3/C_2 = -G_3/C$ cu $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$. Ecuaţia caracteristică $r^2 - Tr = 0$ are o rădăcină nulă şi alta negativă corespunzătoare constantei de timp:

$$\tau = -1/T = C/G_3,$$

în care C este capacitatea echivalentă conexiunii serie iar G_3 este conductanţa rezistorului pe care se descarcă cele două condesatoare înseriate. Tensiunile celor două condensatoare au variaţia în timp:

$$u_1(t) = B_{11}e^{-t/\tau} + B_{12}$$
$$u_2(t) = B_{21}e^{-t/\tau} + B_{22}$$

iar din condiţiile iniţiale rezultă:

$$\begin{array}{l} B_{11} + B_{12} = u_{10} \\ B_{21} + B_{22} = u_{20} \\ -\frac{B_{11}}{\tau} = \frac{G_3}{C_1}(-u_{10} + u_{20}) \\ -\frac{b_{21}}{\tau} = \frac{G_3}{C_2}(u_{10} - u_{20}) \end{array}$$

În acest caz cele două condensatoare pot rămâne încărcate şi în starea asimptotică finală. Dacă iniţial tensiunile celor două condensatoare sunt egale, (condensatorul echivalent este descărcat) nu există regim tranzitoriu ($B_{11} = B_{21} = 0$), condensatoarele rămânând încărcate în starea iniţială. Dacă se notează cu $u_0 = u_{10} - u_{20}$, tensiunea iniţială la bornele condensatorului echivalent de capacitate C, atunci:

$$u_1(t) = \frac{C}{C_1}u_0(e^{-t/\tau} - 1) + u_{10}$$
$$u_2(t) = \frac{C}{C_2}u_0(e^{-t/\tau} - 1) + u_{20}$$

cele două tensiuni evoluând către limita comună (fig. 112)

$$u_\infty = u_{10} - \frac{C}{C_1}u_0 = u_{20} - \frac{C}{C_2}u_0 = \frac{C_1u_10 + C_2u_20}{C_1 + C_2}$$

care este media ponderată a celor două tensiuni, cu ponderi egale cu capacităţile condensatoarelor.

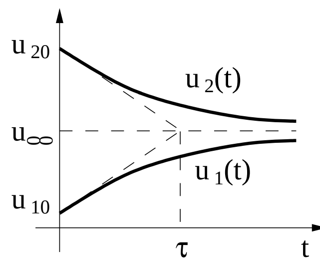


Fig. 4.112.

Aceasta este de fapt tensiunea cu care rămâne încărcat condensatorul echivalent celor două condesatoare presupuse conectate în paralel (în regim staţionar G_3 nu este parcurs de curent).

În cazul conectării în paralel a două condensatoare şi a unui rezistor, partea rezistivă a circuitului nu admite control în tensiune şi formalismul anterior nu poate fi aplicat. Formal G_3 tinde către infinit, ceea ce conduce la o rădăcină infinită a ecuaţiei caracteristice şi implicit la o constantă de timp nulă. Acest fapt este explicabil, deoarece prin conectarea în paralel a două condensatoare încărcate la tensiuni iniţiale diferite ele tind să îşi egaleze instantaneu tensiunile. Saltul tensiunii la bornele unui condensator corespunde unei tranziţii cu constantă de timp nulă. Deoarece variaţia discontinuă a tensiunii la bornele condensatorului determină un curent nemărginit, rezultă că un astfel de circuit este impropriu excitat şi se spune că din cele două condensatoare unul este în exces.

Capitolul 5

Teoremele fundamentale ale circuitelor electrice Analiza topologică a circuitelor

5.1 Independenţa ecuaţiilor lui Kirchhoff. Forme matriceale

Prima teoremă a lui Kirchhoff:

$$\sum_{k\in(n)}{}^{A} i_k = 0$$

este valabilă pentru orice nod $n = 1, 2, \ldots, N$ al unui circuit electric. Cele N ecuaţii algebrice liniare astfel obţinute formează un sistem de relaţii care nu sunt liniar independente. Orice ecuaţie din acest sistem se poate obţine ca o consecinţă a celorlalte $N-1$ ecuaţii (printr-o combinaţie liniară a lor).

Pentru a demonstra această afirmaţie se va folosi forma matriceală a sistemului de ecuaţii:

$$A'i = 0$$

în care s-a notat $i = [i_1, i_2, \ldots, i_n]^T$ vectorul curenţilor şi $A' = [a_{jk}]$, $k = 1, L\, j = 1, n$ o matrice numită matricea extinsă a incidenţelor laturi-noduri.

Elementele acestei matrice au valorile:

$$a_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{dacă latura} & k \notin (j) \\ +1 & \text{dacă latura} & k \text{ părăseşte nodul } (j) \\ -1 & \text{dacă latura} & k \text{ vine la nodul } (j) \end{cases}$$

corespunzătoare factorilor de semn din suma algebrică.

Se constată că pentru orice circuit matricea:

$$A' = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & L \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} & +1 & & & & \\ & & & +1 & & \\ +1 & -1 & & & & -1 \\ & & & -1 & & \\ -1 & & & & & +1 \end{array}\right] \end{array}$$

are pe fiecare coloană două elemente nenule, cu valorile +1 şi -1, celelalte elemente ale coloanei fiind nule. Elementele $a_{jk} = +1$ din coloana k se află în linia corespunzătoare nodului iniţial al laturii k iar elementul $a_{jk} = -1$ se află în linia corespunzătoare nodului final al laturii k. În consecinţă, suma elementelor din orice coloană este nulă, deci suma ecuaţiilor Kirchhoff corespunzătoare tuturor nodurilor unui circuit este nulă.

Rezultă că ecuaţia Kirchhoff asociată unui nod se obţine prin adunarea ecuaţiilor Kirchhoff asociate celorlalte noduri ale circuitului.

Pentru a demonstra că $(N-1)$ ecuaţii sunt liniar independente se va nota cu:

$$f_j(i) = f_j(i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_L) = \sum_{k\in(n)}{}^{A} i_k = \sum_{k=1}^{L} a_{jk} i_k$$

ecuaţia asociată nodului j.

Dacă există constantele nenule C_1, C_2,. . ., C_m asfel încât:

$$\sum_{j=1}^{m} C_j f_j(i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_L) = 0$$

pentru orice i, atunci cele n funcţii f_j sunt liniar dependente, în caz contrar ele sunt liniar independente. Pentru $m = N$ există constantele $C_j = 1$, deci ecuaţiile nu sunt liniar independente. Dacă $m = N - 1$ atunci ecaţiile sunt liniar independente. Există un curent i_k (dintr-o latură, care concură la nodul N) ce intervine o singură dată în combinaţia liniară analizată, deci aceasta nu poate fi nulă pentru constante c_j nenule, afirmaţie valabilă pentru orice $n \leq N - 1$.

A doua teoremă a lui Kirchhoff:

$$(\sum_{k\in[b]})^{A} u_k = 0$$

este valabilă pentru orice buclă a circuitului.

Ecuaţiile scrise pe toate buclele unui circuit nu sunt, în general, liniar independente.

Adunând ecuaţiile Kirchhoff scrise pe buclele $[b_1]$, $[b_2]$ vecine se obţine ecuaţia Kirchhoff obţinută pe bucla $[b]$ (fig. 1). Din acest motiv se spune că buclele $[b_1]$,

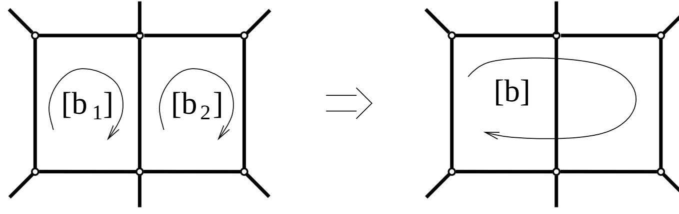


Fig. 5.1.

$[b_2]$ şi $[b]$ nu sunt independente. Pentru a obţine un sistem de bucle independente, pentru care ecuaţiile Kirchhoff cunt liniar independente se foloseşte conceptul de arbore.

Se numeşte arbore al unui graf, o mulţime de laturi din graf, care conţin toate nodurile grafului, dar nu formează bucle.

Laturile unui arbore se numesc ramuri (fig. 2).

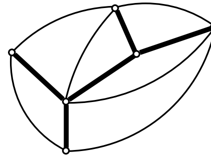


Fig. 5.2.

Fiecare ramură nouă introduce în arbore un nod de graf, dar cum prima ramură conţine două două noduri rezultă că numărul total de ramuri dintr-un graf conex este $N - 1$.

Laturile unui graf, care nu aparţin arborelui se numesc coarde. Mulţimea coardelor unui graf se numeşte coarbore şi conţine $O = L - N + 1$ laturi. Fiecare coardă închide o buclă formată din acea coardă şi în rest din ramuri. Sistemul de bucle astfel format este un sistem independent, deoarece fiecare buclă conţine o latură (coarda generatoare) care nu apare în nici o altă buclă. S-a demonstrat astfel că un circuit electric conex cu L laturi şi N noduri admite $B = L - N + 1$ bucle independente, pe care ecuaţiile Kirchhoff sunt liniar independente.

Ecuaţiile Kirchhoff independente referitoare la tensiuni admit următoarea formă matriceală:

$$Bu = 0$$

în care $u = [u_1, u_2 \ldots, u_L]^T$ este vectorul tensiunilor iar $B = [b_{jk}]$, $j = 1, B$, $k = 1, L$ este o matrice numită matricea incidenţelor laturi-bucle.

Elementele acestei matrice:

$$b_{jk} = \begin{cases} 0; & \text{dacă latura}\, k \notin j \\ +1; & \text{dacă latura}\, k\, \text{aparţine buclei}\, [b]\, \text{şi este orientată similar} \\ -1; & \text{dacă latura}\, k\, \text{aparţine buclei}\, [b]\, \text{şi este orientată invers.} \end{cases}$$

au valori în concordanţă cu factorii de semn din suma algebrică. Linia j a matricei B conţine elemente nenule doar pe coloanele corespunzătoare laturilor care aparţin buclei $[j]$.

Dacă laturile unui graf se numerotează, începând cu laturile arborelui şi continuând apoi cu coardele iar buclele se numerotează conform coardelor care le-au generat, rezultă că matricea B conţine în ultimele coloane matricea unitate $I \in \mathbb{R}^{2X3}$ (fig. 3):

$$B = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & & -1 & 1 & & \\ & -1 & -1 & & 1 & \\ 1 & -1 & & & & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

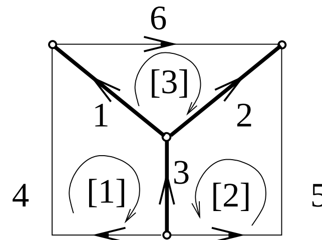


Fig. 5.3.

Sensul de parcurs al buclelor este dat de sensul coardei generatoare.

Primele $N-1$ coloane vor conţine o matrice Λ care descrie complet topologia circuitului, deoarece B se poate partaja în:

$$B = [\Lambda | I]$$

Matricea Λ se numeşte matricea incidenţelor esenţiale.

Prin exprimarea tensiunilor de-a lungul laturilor ca diferenţe de potenţial, ecuaţiile Kirchhoff pentru tensiuni, sunt automat satisfăcute.

Folosind vectorul potenţialelor $V = [V_1, V_2, \ldots, V_{N-1}]^t$, în care s-a presupus că nodul N este nod de referinţă şi $V_N = 0$, se verifică uşor că relaţia matriceală:

$$u = A^T V$$

exprimă tensiunile ca diferenţe de potenţiale.

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_L \end{bmatrix}
=
\begin{array}{c} \\ 1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ L \end{array}
\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad \dots \quad N \\ \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ +1 & & & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \end{bmatrix} \end{array}
\begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}
\\
u \quad = \qquad A^T \qquad V
\end{array}
$$

S-a presupus că tensiunile au aceleaşi sensuri de referinţă ca şi intensităţile (mărimile sunt asociate conform regulii de la receptoare).

Deoarece matricea A^T (transpusa matricei A) conţine în linia k doar două elemente nenule, în coloanele corespunzătoare nodului iniţial al laturii k ($a_{kj'} = 1$) şi nodul final al laturii k ($a_{kj''} = -1$), rezultă că tensiunea $u_k = V_{j'} - V_{j''}$.

Utilizarea formei $u = A^T V$ a teoremei a doua a lui Kirchhoff are avantajul că foloseşte aceeaşi matrice ca prima teoremă a lui Kirchhoff, dar are dezavantajul că obligă la folosirea potenţialelor.

Introducând tensiunile $u = A^T V$ în ecuaţia $Bu = 0$, rezultă $A^T BV = 0$, relaţie valabilă pentru orice valori ale potenţialelor, în consecinţă:

$$A^T B = 0$$

deci matricele A şi B sunt ortogonale.

Matricele A şi Bse numesc matrice topologice, deoarece fiecare din ele descrie complet topologia circuitului. Elementele lor au valori 0, +1, -1, independente de structura sau comportarea laturilor circuitului.

O consecinţă importantă a primei teoreme a lui Kirchhoff se obţine prin adunarea ecuaţiilor referitoare la două sau mai multe noduri vecine (fig. 4):

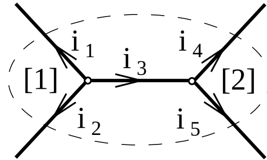


Fig. 5.4.

$$
\begin{array}{l}
[1]:\ i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\
\underline{[2]:\ -i_3 + i_4 + i_5 = 0} \\
\Sigma:\ i_1 + i_2 + i_4 + i_5 = 0.
\end{array}
$$

Prin această operaţie se reduc intensităţiile curenţilor din laturile cuprinse în interiorul suprafeţei închise Σ, care conţine nodurile considerate.

Combinaţia liniară obţinută este chiar suma algebrică a intensităţilor curenţilor din laturile ce străbat suprafaţa Σ şi ea are valoare nulă.

Se numeşte secţiune într-un graf conex o mulţime de laturi, care eliminate din graf determină separarea acestuia în două părţi disjuncte iar reintroducerea lor succesivă generează grafuri conexe.

Suprafeţele închise Σ, care conţin în interiorul lor unul sau mai multe noduri dintr-un graf intersectează laturile unei secţiuni (fig. 5). Secţiunile unui graf se noteză cu {1}, {2}, {3}, ...

$$\Sigma_1 : \{1, 2, 3\}$$
$$\Sigma_2 : \{4, 2, 3, 7\}$$
$$\Sigma_3 : \{4, 5, 8, 3\}.$$

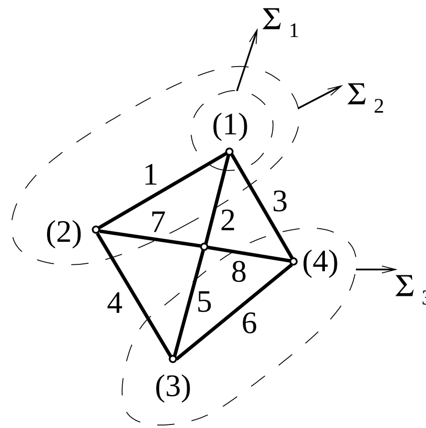


Fig. 5.5.

Prima teoremă a lui Kirchhoff pote fi generalizată sub forma:

$$\sum_{k\in\{S\}}{}^{A} i_k = 0$$

în care $\{S\}$ este o secţiune arbitrară a circuitului.

Dacă fiecare secţiune conţine doar un singur nod, atunci această formă a ecuaţiilor lui Kirchhoff degenează în forma clasică.

Numărul maxim de ecuaţii de această formă liniar independentă este (N-1).

Pentru scrierea matriceală a acestor ecuaţii:

$$Ci = 0$$

se foloseşte matricea $C = [c_{jk}]$ a incidenţelor laturi-secţiuni. Elementele acestei matrice sunt:

$$c_{jk} = \begin{cases} 0; & \text{dacă latura}\, k \notin \{j\} \\ +1; & \text{dacă latura}\, k\, \text{părăseşte secţiunea}\{j\} \\ -1; & \text{dacă latura}\, k\, \text{intră în secţiunea}\{j\} \end{cases}$$

O metodă simplă de a obţine un sistem de secţiuni pe care ecuaţiile Kirchhoff sunt independente este de a genera aceste secţiuni pornind de la ramurile unui arbore.

Fiecare ramură a unui arbore generează o secţiune unică formată din acea ramură iar în rest din coarde (fig. 6). Pentru a genera regula de semn a sumei algebrice, secţiunile trebuie orientate. Se consideră că sensurile de referinţă ale secţiunilor sunt date de sensurile ramurilor generatoare.

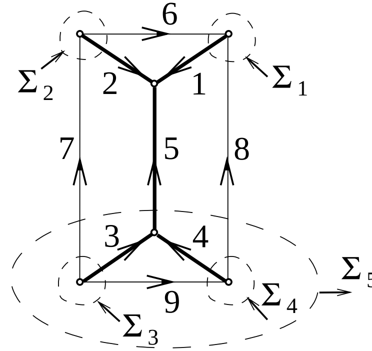


Fig. 5.6.

Matricea C are structura:

$$C = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & & & & & -1 & & -1 & \\ & 1 & & & & 1 & -1 & & \\ & & 1 & & & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 & & 1 & 1 & \end{array} \right] \end{array}$$

Pe linia j se află un număr de elemente nenule egal cu numărul laturilor ce străbat secţiunea $\{j\}$. Dacă laturile sunt numerotate începând cu ramurile, iar secţiunile sunt numerotate în concordanţă cu ramurile generatoare, matricea C admite partajarea

$$C = [I|V],$$

în care $I \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$.

Deoarece matricea C se obţine printr-o transformare liniară aplicată matricei A, rezultă că

$$C^T B = 0,$$

deci C şi B sunt ortogonale.

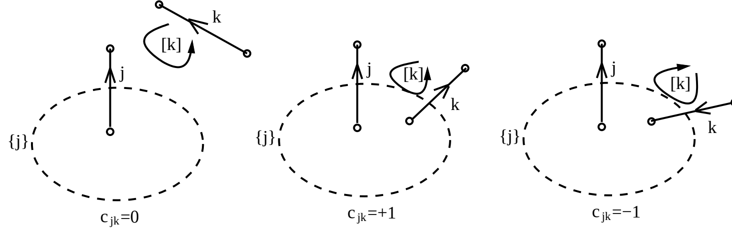


Fig. 5.7.

Pentru o secţiune $\{j\}$ determinată de ramura j, elementul c_{jk} poate avea trei valori distincte (fig. 7).

Dacă latura k nu intersectează secţiunea $\{j\}$, atunci $c_{jk} = 0$ şi deoarece bucla k nu va conţine latura j, rezultă că $b_{kj} = 0$.

Dacă latura k părăseşte secţiunea $\{j\}$, atunci $c_{jk} = +1$, dar deoarece bucla k este orientată invers decât latura $[j]$, rezultă că $b_{kj} = -1$.

Dacă latura k intră în secţiunea $\{j\}$, rezultă că $c_{jk} = -1$, dar în acest caz $b_{kj} = +1$.

Aceste observaţii permit să se afirme că $c_{jk} = b_{kj}$, deci că $V = -\Lambda^T$.

Folosind matricea incidenţelor esenţiale, ecuaţiile Kirchhoff au următoarea formă matriceală:

$$Ci = [I| - \Lambda^T]i = 0,$$

$$Bu = [\Lambda|I]u = 0.$$

Aceste ecuaţii sunt liniar independente, rangul matricei C fiind $(N - 1)$, iar cel al matricei B fiind $(L - N + 1)$.

Aceste forme ale ecuaţiilor presupun că tensiunea şi intensitatea din fiecare latură au sensuri de referinţă comune (s-a adoptat regula de asociere a sensurilor de la generatoare).

Dacă vectorii:

$$i = [i_r|i_c], \; u = [u_r|u_c],$$

se partajează în vectori asociaţi ramurilor şi respectiv coordonatelor, ecuaţiile Kirchhoff devind:

$$i_r - \Lambda^T i_c = 0,$$

$$\Lambda u_r + u_c = 0.$$

Aceste relaţii scrise sub forma:

$$i_r = \Lambda^T i_c, \ u_c = -\Lambda u_r,$$

evidenţiază faptul că intensităţile curenţilor din ramură se determină în funcţie de cele din coarde, prin aplicarea primei teoreme Kirchhoff, iar tensiunile din coarde se determină în funcţie de cele din ramură, prin aplicarea celei de a doua teoaremă a lui Kirchhoff. Curenţii din coarde şi tensiunile din ramuri pot avea valori arbitrare, fără ca acestea să contravină teoremelor Kirchhoff. Cunoaşterea acestor mărimi permite determinarea tuturor curenţilor şi tensiunilor circuitului:

$$i = [i_c, i_r] = [\Lambda^T i_r, i_c] = [\Lambda^T | I] i_c = B^T i_c.$$

În concluzie, teoremele lui Kirchhoff au una din următoarele forme echivalente:

$$\begin{cases} Ai = 0 \\ u = A^T v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ci = 0 \\ Bu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i_r = \Lambda^T i_c \\ u_c = -\Lambda u_r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i = B^T i_c \\ u = C^T u_r \end{cases}$$

Acestea alcătuiesc ecuaţii liniar independente.

5.1.1 Teorema lui Tellegen. Conservarea puterilor

5.1.2 Analiza circuitelor electrice. Problema fundementală

Problema fundementală a analizei circuitelor electrice are ca necunoscute intensităţile curenţilor din laturi $i_k, k = 1, L$ şi tensiunile la bornele laturilor $u_k, k = 1, L$. Pentru a determina aceste mărimi se presupun cunoscute:

- topologia circuitului analizat, descrisă grafic prin graful orientat G al circuitului sau numeric prin una din matricele topologice;

- ecuaţiile constitutive ale laturilor circuitului, respectiv operatorii de impedanţă $\zeta_k, k = 1, L$ sau de admitanţă $y_k, k = 1, L$.

Operatorii de impedanţă/admitanţă pot fi determinaţi dacă se conosc parametrii elementelor din laturi (R_k, L_k, C_k pentru laturile pasive şi e_k, j_k pentru laturile active), iar în cazul circuitelor cu elemente acumulatoare de energie condiţiile iniţiale (curenţii din bobine $i_{i_k}(0)$ şi tensiunile la bornele condensatoarelor $u_{C_k}(0)$).

Din punct de vedere matematic problema fundementală a analizei unui circuit electric constă în rezolvarea sistemului de ecuaţii, format din:

- ecuaţiile Kirchhoff I:
$$Ai = 0;$$

– ecuaţiile Kirchhoff II:

$$Bu = 0;$$

– ecuaţiile constitutive ale laturilor:

$$u = \zeta i,$$

în care $\zeta = [\zeta_{jk}]$ este matricea operatorilor de impedanţă dacă toate laturile sunt controlate în curent sau

$$i = yu,$$

în care $y = [y_{jk}]$ este matricea operatorilor de admitanţă, dacă laturile sunt controlate în tensiune.

Prin rezolvarea acestui sistem de $2L$ ecuaţii se determină vectorii: curent $i = [i_1, i_2, \ldots, i_L]^T$ şi tensiune $u = [u_1, u_2, ..., u_L]^T$, care au în total $2L$ componente şi reprezintă soluţia problemei.

Dacă operatorii ζ sau y sunt liniari, problema admite soluţia banală $u = 0$, $i = 0$, deci circuitul nu este străbătut de curent. Pentru ca circuitul să fie parcurs de curenţi este necesar ca acesta să conţină cel puţin o sursă de curent, tensiune sau să aibă condiţii iniţiale nenule.

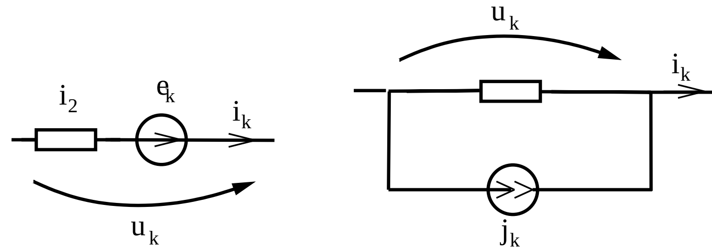


Fig. 5.8.

Circuitele electrice alcătuite cu elemente dipolare au laturile cu structura prezentată în (fig. 8).

Ecuaţiile lor constitutive sunt:

$$u_k = \zeta_k i_k - e_k,$$

$$i_k = y_k u_k + j_k,$$

în care prin particularităţile $\zeta_k = 0$ şi $y_k = 0$ se obţin cazurile degenerate ale surselor ideale de tensiune şi respectiv de curent.

Dacă operatorii ζ_k şi y_k sunt liniari se spune că circuitul este liniar. Separarea surselor va simplifica analiza circuitelor cu condiţii iniţiale nenule, care pot fi echivalate prin surse.

Sursele ideale nu pot fi conectate arbitrar într-un circuit. De exemplu, prin conectarea în paralel a două surse ideale de tensiune se obţine un circuit pentru care problema fundamentală nu are soluţie unică.

Un circuit electric se numeşte bine formulat dacă problema fundamentală a analizei acestui circuit are soluţie şi aceasta este unică. În caz contrar se numeşte prost formulat.

Circuitele care conţin bucle formate exclusiv din surse ideale de tensiune nu sunt circuite bine formulate, deoarece dacă tensiunile la bornele lor nu satisfac teorema a doua a lui Kirchhoff problema analizei nu are soluţie, iar dacă ele satisfac această teoremă, curenţii ce străbat laturile buclei pot lua valori arbitrare, deoarece prin suprapunerea unui curent arbitrar ce ar "străbate" bucla, ecuaţiile nu se modifică. În acest ultim caz soluţia nu este unică.

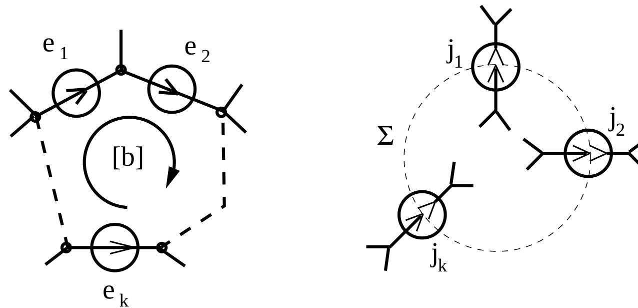


Fig. 5.9.

În mod asemănător, circuitele care conţin secţiuni formate exclusiv din cu laturi surse ideale de curent sunt circuite prost formulate.

Atunci când curenţii acestor laturi nu satisfac prima teoremă a lui Kirchhoff, problema fundamentală nu are soluţie. Dacă în schimb, curenţii electromotori sunt în acord cu acestă teoremă, soluţia nu este unică, tensiunile la bornele surselor de curent nu au valori unice. De exemplu, în cazul a două surse ideale de curent $j_1 = j_2 = j$, tensiunile u_1 şi u_2 la bornele acestor surse pot fi mo-

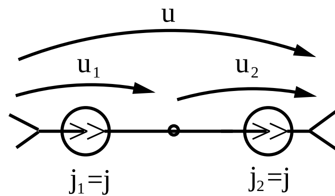


Fig. 5.10.

dificate cu o constantă C arbitrară astfel încât $u'_1 = u_1 + C$, $u'_2 = u_2 - C$ şi $u = u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$.

În particular prin pasivizarea surselor, rezultă că pe două izolatoare perfecte înseriate căderile de tensiune nu pot fi determinate prin analiza circuitului electric.

Pornind de la observaţia că circuitele reale au întotdeauna "soluţie" se poate afirma că circuitele electrice fără soluţie apar datorită deficienţelor de modelare a elementelor reale cu scheme formate din elemente ideale. Aceste situaţii nedorite pot fi eliminate prin utilizarea unor modele mai complicate, care conţin şi elemente "parazite", ce pot juca în anumite regimuri un rol esenţial (de exemplu, rezistenţele interne ale surselor, oricât de mici ar fii acestea).

Czul circuitelor cu soluţii multiple poate reflecta o situaţie reală. Circuitele neliniare în regim staţionar pot avea mai multe puncte de funcţionare, dintre care unele stabile. Această proprietate este fundamentală, înrealizarea circuitelor cu memorie, cum sunt circuitele bistabile. Starea unui astfel de circuit depinde de evoluţia sa în imp, deci rezultă în mod univoc prin analiza circuitului în regim variabil. Determinarea condiţiilor în care soluţia există şi este unică. Se face prin analiza eacuaţiilor circuitului; de aceea aceste condiţii depind de regimul de funcţionare al circuitului. Totuşi anumite condiţii necesare de bună funcţionare sunt comune, indiferent de regim.

Teorema arborelui normal. Dacă un circuit nu admite un arbore în care să se afle toate sursele ideale de tensiune şi nici o sursă ideală de curent atunci el este prost formulat.

Arborele menţionat de această teoremă se numeşte arbore normal. Teorema evidenţiază o condiţie necesară de bună formulare şi anume existenţa unui arbore normal.

Circuitele electrice care nu admit arbore normal conţin fie bucle cu surse laturi ideale de tensiune fie secţiuni cu laturi surse ideale de curent. Se spune despre astfel de circuite că au surse în exces.

Dacă circuitul analizat conţine arbore normal atunci nu există în circuit bucle cu surse ideale de tensiune şi secţiuni cu surse ideale de curent.

Considerând un circuit bine formulat se pot plasa toate sursele de tensiune în arbore şi cele de curent în coarbore. Ecuaţiile constitutive ale laturilor au formele matriceale:

$$u_r = \zeta i_r - e,$$

$$i_c = y u_c + j,$$

în care $u = [u_r|u_c]$, $i = [i_r|i_c]$ s-au partajat corespunzător ramurilor (u_r, i_r) şi respectiv coardelor (u_c, i_c).

Folosind formele cu matricea incidenţelor esenţiale ale teoremelor Kirchhoff:

$$i_r - \Lambda^T i_c = 0,$$

$$\Lambda u_r + u_c = 0,$$

prin substituirea ecuaţiilor constitutive, rezultă un sistem redus de L ecuaţii cu L necunoscute:

$$u_r \zeta \Lambda^T i_c = -e$$

$$i_c - y\Lambda u_r = j.$$

Această formă a ecuaţiilor:

$$\begin{bmatrix} I & -\zeta\Lambda^T \\ -y\Lambda & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e \\ j \end{bmatrix}$$

are avantajul că vectorul soluţie $x = [u_r, i_c]^T$ conţine câte o necunoscută pentru fiecare latură curentul, în cazul coardelor şi tensiunea, în cazul ramurilor. Celelalte necunoscute secundare, rezultă prin aplicarea relaţiilor Kirchoff: $i_1 = \Lambda^T i_c$, $u_c = -\Lambda u_r$.

Metoda de analiză prezentată este o metodă de substituţie, care conduce la îmbunătăţirea dimensiunii sistemului de ecuaţii şi la reducerea considerabilă a efortului necesar rezolvării.

Necunoscutele principale, care rezultă direct din rezolvarea sistemului sunt $x = [u_r, i_c]^T$, sunt **variabilele esenţiale** ale circuitului.

Aceasta nu este singura metodă de substituţie folosită în analiza circuitelor electrice.

Dacă circuitul nu conţine surse ideale de curent şi toate laturile sunt comandate în curent:

$$u = \zeta i - e.$$

Prin substituţia tensiunilor în ecuaţia $Bu = 0$, rezultă

$$B\zeta i = Be,$$

iar împreună cu ecuaţiile $Ai = 0$ se formează sistemul ecuaţiilor Kirchhoff:

$$\underset{k}{\begin{bmatrix} A \\ B\zeta \end{bmatrix}} i = \underset{e'}{\begin{bmatrix} 0 \\ Be \end{bmatrix}}$$

din care rezultă curenţii din laturi $i = k^{-1}e'$. Tensiunile prin laturi se obţin prin substituţii în ecuaţiile constitutive $u = \zeta i - e$. Această metodă este cunoscută sub numele de **analiza curenţilor**, deoarece are ca necunoscute principale curenţii din laturi.

Dacă toate laturile unui circuit sunt controlate în tensiune (circuitul nu conţine surse ideale de tensiune), atunci ecuaţiile constitutive se pot scrie sub forma:

$$i = yu + j,$$

şi din $Ai = 0$ rezultă: $Ayu = -Aj$.

Împreună cu ecuaţia $Bu = 0$, rezultă sistemul liniar:

$$\underset{k'}{\begin{bmatrix} Ay \\ B \end{bmatrix}} u = \underset{j'}{\begin{bmatrix} -Aj \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Prin rezolvarea acestui sistem rezultă tensiunile la bornele laturilor $u = k^{-1}j'$, iar apoi prin substituţii la ecuaţiile constitutive, rezultă si curenţii din laturi: $i = yu+j$. Deoarece în acest caz necunoscutele principale sunt tensiunile laturilor se spune că această metodă de substituţie se bazează pe **analiza tensiunilor**. O reducere suplimentară a dimensiunii sistemului se obţine prin considerarea drept necunoscute principale a curenţilor de coarde i_c. în număr de $L - N + 1$. Această metodă se numeşte **analiza buclelor** (sau a curenţilor ciclici).

Deoarece curenţii din laturi se exprimă în funcţie de cei din coardă $i_r = \Lambda^T i_c$,rezultă că $i = [i_r, i_c] = [\Lambda^T i_c, i_c] = [\Lambda^T|I]i_c = B^T i_c$, deoarece $B^T = [\Lambda|I]^T = [\Lambda^T|I]$.

Considerând laturile controlate în curent $u = \zeta i - e$, din relaţia $Bu = 0$, rezultă: $B\zeta i = Be$ şi $B\zeta B^T i_c = Be$.

Notând $\zeta' = B\zeta B^T$ numită matricea impedanţelor ciclice şi $e' = Be$, rezultă:

$$\zeta' i_c = e',$$

din care $i_c = \zeta^{-1}e'$. După determinarea curenţilor din coarde i_c (numiţi şi curenţi ciclici, deoarece se pot considera curenţii fictivi, care străbat buclele independente generate de aceste coarde) se determină curenţii din ramuri $i_r = \Lambda^T i_C$ şi apoi tensiunile laturilor $u = \zeta i - e$.

Analiza secţiunilor (metoda tensiunilor din ramuri)

Capitolul 6

Teoremele fundamentale ale circuitelor electrice

6.1 Puteri. Relaţii de conservare

Pentru a caracteriza transferul de energie între un element multipolar şi circuitul electric din care acesta face parte se utilizează puterea transferată pe la borne:

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} i_k(t) v_k(t), \tag{6.1}$$

în care $i_k(t)$ este intensitatea curentului ce străbate borna k, $v_k(t)$ este potenţialul bornei k iar n este numărul de borne ale elementului.

Sensul acestei puteri depinde de semnul sumei $P(t)$ dar şi de sensurile de referinţă ale curenţilor. Dacă toţi curenţii $i_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ au sensurile de referinţă astfel alese încât să părăsească elementul multipolar, atunci $P(t)$ are sensul convenţional e la element spre circuit (fig.17.1.a). Dacă în schimb, curenţii $i_k(t)$ au sensuril de referinţă orientate spre elementul de circuit, atunci puterea $P(t)$ este convenţional absorbită de element (fig.17.1.b). Dacă $P(t) > 0$, atunci sensul real al puterii coincide cu cel convenţional, iar dacă $P(t) < 0$, atunci sensul real este invers celui convenţional.

Conform primei teoreme Kirchhoff, intensităţile curenţilor prin bornele unui element multipolar au suma nulă, ceea ce face ca valoarea puterii transferate să nu depindă de alegerea referinţei potenţialului. Dacă se modifică toate potenţialele cu constanta v_0, rezultă:

$$P'(t) = \sum_{k=1}^{n} i_k(t)(v_k(t) - v_0) = \sum_{k=1}^{n} i_k(t) v_k(t) + v_0 \sum_{k=1}^{n} i_k(t) = P(t),$$

deci, invarianţa puterii.

Alegând una dintre bornele multipolului ca referinţă a potenţialului, de exemplu $v_n = 0$, se obţine:

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n-1} i_k(t)v_k(t). \tag{6.2}$$

În cazul particular al elementelor dipolare la care n=2 se obţine, pornind de la relaţia (6.2), $P(t) = i_1(t) \cdot v_1(t)$. Deoarece $v_1(t)$ reprezintă chiar tensiunea $u(t)$ la bornele dipolului, orientată de la borna 1 spre borna de referinţă, iar $i_1(t)$ este intensitatea $i(t)$ ce strabate elementul, rezultă:

$$P(t) = u(t) \cdot i(t). \tag{6.3}$$

În stabilirea sensului puterii (6.3) se deosebesc două cazuri:

– regula de asociere a sensurilor de referinţă de la receptoare, caz uzual în care tensiunea şi intensitatea au sensurile de referinţă cu aceeaşi poziţie faţă de borne (fig.17.2.a) şi în care puterea (6.3) este convenţional absorbită de element;

– regula de asociere a sensurilor de referinţă de la generatoare, caz în care tensiunea şi intensitatea au sensuri de referinţă opuse (una orientată de la borna 1 spre 2, iar cealaltă orientată de la borna 2 spre 1) şi în care sensul convenţional al puterii este de la element spre circuit.

Şi în aceste cazuri sensul real al puterii coincide cu cel convenţional, dacă $P(t) > 0$ şi este invers în caz contar.

Exemplul 1. Elementul tripolar din figura 17.3.a absoarbe o putere

$$P = v_1 i_1 + v_2 i_2 = 20 - 25 = -5W,$$

deci în realitate generează puterea electrică $|p| = 5W$, iar elementul dipolar din figura 17.3.b, având sensurile de referinţă asociate după regula de la generatoare (curentul în jos şi tensiunea în sus) produce puterea

$$P = u \cdot i = -50mW.$$

Următoarea teoremă garantează consistenţa definiţiei (6.1) în cadrul teoriei circuitelor electrice.

Teorema 1, a puterii transferate de un circuit neizolat: o parte a unui circuit electric, considerată ca un multipol, transferă pe la bornele sale de acces o putere electrică egală cu suma puterilor transferate pe la borne de către elementele ce o alcătuiesc.

În această teoremă s-a considerat că toate elementele au acelaşi sens convenţional al puterii.

Teorema va fi demonstrată în cazul particular al circuitelor alcătuite din elemente dipolare. Dacă se notează $u = [u_1, u_2, ..., u_l]^T$ vectorul tensiunilor la bornele celor l laturi, $i = [i_1, i_2, ..., i_l]^T$ vectorul intensităţilor curenţilor din laturi, $v = [v_1, v_2, ..., v_n]^T$ vectorul potenţialelor celor n noduri şi $j = [j_1, j_2, ..., j_n]^T$ vectorul curenţilor injectaţi în nodurile circuitulu, suma puterilor transferate pe la bornele elementelor dipolare este egală cu produsul scalar al vectorilor u şi i,

$$P = \sum_{k=1}^{l} u_k i_k = u^T i = (A^T v)^T i = v^T (Ai) = v^T j, \tag{6.4}$$

în care A estre matricea de incidenţă a laturilor la noduri. În relaţia 6.4 s-au folosit cele două teoreme ale lui Kirchhoff sub forma:

$$Ai = j,\ u = A^T v. \tag{6.5}$$

Ca o consecinţă a teoremei 1 rezultă că orice parte a unui circuit electric alcătuit din elemente dipolare pasive, la care $u \cdot i > 0$ transferă pe la bornele sale de acces o putere totală nenegativă. Această afirmaţie, valabilă şi în cazul cicuitelor neliniare este cunoscută sub numele de **teorema pasivităţii**.

O altă consecinţă importantă a teoremei 1 se referă la circuitele electrice izolate.

Teorema 2, a conservării puterii în circuitele electrice: suma puterilor transferate pe la borne de către toate elementele unui circuit electric este nulă:

$$\sum_{k=1}^{l} u_k i_k = 0. \tag{6.6}$$

În relaţia (6.6) s-a considerat că toate elementele din circuit au aceeaşi regulă de asociere a sensurilor.

Pentru ca suma (6.6) să fie nulă în condiţiile în care termenii ei sunt nenuli este necesar ca termenii pozitivi să aibă suma egală cu modulul sumei termenilor negativi. În consecinţă, în orice moment, într-un circuit electric izolat puterea totală reală consumată este egală cu puterea totală reală generată. Această egalitate este cunoscută sub numele de "bilanţul puterilor" şi este o consecinţă a conservării puterii electrice. în demonstraţia teoremelor 1 şi 2 precum şi a relaţiei de bilanţ s-au folosit formele generale ale teoremelor lui Kirchhoff, ceea ce înseamnă că ele sunt valabile, indiferent de tipul sau structura elementelor care alcătuiesc circuitul.

Exemplul 2. Aplicând teorema conservării puterilor pentru circuitul reprezentat în figura 17.4.a se obţine

$$P = \sum_{k=1}^{6} u_k i_k = -10 + 2,5 - 5 + 37.5 - 40 + 15 = 0. \tag{6.7}$$

În calcul s-au folosit intensităţile curenţilor reprezentate în graful din figura 17.4.b şi tensiunile reprezentate în graful din igura 17.4.c. Se constată că cele două grafuri sunt orientate similar, ceea ce este echivalent cu alegerea regulii de asociere a sensurilor de la receptoare pentru toate laturile circuitului.

Pentru ca relaţia (6.6) să fie satisfăcută este suficient ca intensităţile curenîlor să fie preluate dintr-un graf consistent cu prima teoremă a lui Kirchhoff, iar tensiunile dintr-un graf orientat, echivalent cu primul, dar consistent cu a doua teoremă a lui Kirchhoff. Se constată că nu este necesar ca aceste mărimi să se refere la acelaşi circuit electric ci doar la circuite echivalente topologic. Această genralizare a teoremei 3 este cunoscută sub numele de **teorema pseudoputerilor (Tellegen)**, deoarece produsul dintre o tensiune şi o intensitate arbitrară se numeşte pseudoputere.

Ca o exemplificare a teoremei lui Tellegen se poate considera chiar relaţia (6.7), în care tensiunile (fig 17.4.b) şi intensităţile curenţilor (fig 17.4.c) se referă la circuitul din figura 17.4.a, dar la momente diferite de timp.

6.2 Teoreme de existenţă şi unicitate a soluţiei

Problema fundamentală a analizei circuitelor electrice constă în determinarea intensităţilor curenţilor în toate laturile unui circuit dat, a tensiunii la bornele laturilor şi eventual a potenţialelor nodurilor circuitului.

Datele acestei probleme se pot clasifica în trei categorii:

- date tipologice, referitoare la modul în care sunt conectate elementele circuitului;
- date care descriu elementele circuitului şi anume parametrii elementelor liniare, funcţiile caracteristice ale elementelor neliniare şi parametrii surselor variabile sau constante în timp;
- condiţii iniţiale, necesare doar în analiza regimului tranzitoriu.

Se pune în mod natural întrebarea dacă o astfel de problemă este corect fomulată, respectiv dacă sistemul de ecuaţii asociat circuitului (format din ecuaţiile generale, KI, KU şi cele caracteristice) are soluţie şi dacă aceasta este unică. se pot da uşor exemple de circuite incorect formulate, care nu au soluţie sau aceasta nu este unică.

Exemplul 3. Circuitul din figura 17.5.a nu are soluţie deoarece tensiunile la bornele celor două surse ideale, conectate în paralel nu pot fi egale, deoarece intensităţile curenţilor din cele două surse pot avea valori arbitrare, care nu pot fi determinate univoc din ecuaţiile circuitului.

Pornind de la observaţia că circuitele reale au întotdeauna "soluţie" se poate afirma că circuitele electrice fără soluţie apar datorită deficienţelor de modelare a elementelor reale prin scheme "echivalente", formate din elemente ideale. Astfel

de situaţii nedorite pot fi eliminate prin utilizarea unor modele mai complicate, care conţin şi elemente "parazite", ce pot juca în anumite regimuri un rol esenţial. De exemplu, circuitele din figura 17.5 devin bine formulate, dacă se iau în considerare rezistenţele interne ale surselor, oricât de mici dar nenule ar fi acestea, respectiv dacă se înlocuiesc sursele ideale cu surse reale.

Cazul circuitelor cu soluţii multiple poate reflecta o situaţie reală. Circuitele neliniare în regim staţionar pot avea mai multe puncte de funcţionare, dintre care unele stabile. Această proprietate este fundamentată în proiectarea circuitlor de memorie, cum este circuitul bistabil.

Determinarea condiţiilor în care soluţia există şi este unică se face prin analiza ecuaţiilor circuitului; de aceea aceste condiţii depind de regimul de funcţionare al circuitului.

Teorema 3, de existenţă şi unicitate a soluţiei unui circuit electric liniar fără surse comandate, în regim staţionar: condiţia necesară şi suficientă ca un circuit electric liniar, format in rezistoare cu rezistenţe pozitive, surse ideale de curent şi surse ideale de tensiune să aibă soluţie unică este existanţa, unui arbore în circuit, care să conţină toate sursele ideale de tensiune şi nici o sursă ideală de curent.

Această teoremă poate fi aplicată şi în cazul circuitlor alcătuite din elemente dipolare rezistive, în regim variabil.

Arborele cu proprietăţile menţionate în teorema 3 se numeşte **arbore normal**. Dacă într-un circuit nu există arbore normal, atunci acesta conţine cel puţin o buclă formată din surse ideale de tensiune sau o secţiune formată din surse ideale de curent. Aceste surse se numesc generatoare în exces. Dacă sursele ideale de tensiune în exces (v.fig.17.6.a) satisfac a doua relaţie a lui Kirchhoff, atunci ecuaţiile circuitului nu au soluîe unică, deoarece curenţii dinaceste surse nu sunt univoc determinaţi. Dacă în schimb sursele ideale de tensiune nu satisfac a doua relaţie a lui Kirchhoff, atunci circuitul nu are soluţie. Dacă sursele ideale de curent în exces (v.fig.17.6.b) satisfac prima relaţie Kirchhoff, atunci circuitul nu are soluţie unică, deoarece tensiunile la bornele acestor surse nu au valori univoc determinate de ecuaţii, iar în cazul în care aceste surse nu satisfac prima relaţie Kirchhof, circuitul nu are soluîe. În consecinţă, pentru ca problema analizei unui circuit să fie bine formulată este necesar ca acesta să aibă un arbore normal.

Pentru a determina unicitatea soluţiei se presupune prin absurd că există două soluţii. Deoarece diferenţa lor $\Delta u_k, \Delta i_k$ satisface formula generală a teoremelor lui Kirchhoff se poate aplica teorema lui Tellegen:

$$0 = \sum_{k=1}^{l} \Delta u_k \Delta i_k = \sum_{k=1}^{l} R_k \Delta i_k^2 > 0,$$

ceea ce evidenţiază absurditatea supoziţiei.

Exemplul 4. Circuitul din figura 17.7.a este bine formulat, deoarece deţine un arbore normal, marcat cu linie groasă, dar circuitul din figura 17.7.b nu este bine formulat, deoarece nu stafisface condiţiile teoremei 3.

Teorema 3 a fost generalizată la cazul circuitelor neliniare de Desoer şi Katzenelson [Willson 1975].

Teoreme 4, de existenţă şi unicitate a soluţiei unui circuit electric rezistiv, neliniar, cu elemente dipolare ale căror caracteristici sunt funcţii continui şi monoton crescătoare, definite pe întreaga axă reală: dacă în circuit există un arbore, care conţine în ramurile sale numai rezistoare controlate în curent, iar în coarde rezistoare controlate în curent, atunci există o soluţie pentru orice valori ale surselor de tensiune sau curent şi această soluţie este unică.

În această teoremă s-a adoptat regula sensurilor de la receptoare pentru toate laturile circuitului. Deoarece caracteristicile u-i ale elementelor dipolare nu trebuie să fie în mod necesar strict monotone, sursele ideale de tensiune se consideră rezistoare controlate în curent, iar sursele ideale de curent se consideră rezistoare controlate în tensiune, în ambele cazuri funcţiile caracteristice fiind constante. Rezistoarele ale căror funcţii caracteristice sunt bijective pot fi plasate atât în arbore cât şi în coarbore, deoarece ele pot fi considerate controlate atât în curent cât şi în tensiune.

Condiţiile necesare existenţei şi unicităţii soluţiei circuitelor cu elemente rezistive sunt evidenţiate de teoremele Desoer - Wu şi Sardberg - Willson.

Aplicând aceste teoreme, se demoanstrează că sircuitele cu diode, tranzistoare bipolare, rezistoare liniare şi surse indepedente de tensiune sau curent au structura tipologică prezentată în figura 17.8 nu pot avea soluţii multiple, indiferent de valorile parametrilor elementelor de circuit. În consecinţă, nu se pot obţine circuite bistabile cu tranzistoare în conexiunea bază comună (în particular cu un singur tranzistor). Nici circuitele cu două tranzistoare, separabile în două subcircuite conectate ca în figura 17.9 nu au soluţii multiple.

Un rezultat fundamental rpivind unicitatea soluţiei în circuite cu tranzistoare este prezentat de Nielsen şi Willson, care demonstrează că circuitele cu rezistoare liniare, surse independente de tensiune sau curent au soluţie unică, dacă î numai dacă nu conţin o structură cu reacţie de tipul celei din figura 17.10. Pentru evidenţierea structurii cu reacţie se pasivizează sursele, rezistoarele se elimină sau se scurtcircuitează, iar tranzistoarele, cu excepţia unei perechi, se înlocuiesc cu una din schemele prezentate în figura 17.11 (se consideră pe rând portiunile blocate sau în conducţie perfectă).

Exemplul 5. Analizând circuitul din figura 17.12.a se constată că acesta conţine o structură cu reacţie (v.fig.17.12.b), deci pentu anumite valori ale parametrilor, circuitul va avea soluţii multiple.

Pentru a obţine circuitul din figura 17.12.b s-au scurtcircuitat rezistoarele R_3, R_5 şi rezistanţa internă a sursei, iar rezistoarele R_1, R_2 şi R_4 au fost eliminate.

Condiţiile topologice necesare şi suficiente pentru ca un circuit electric cu rezistoare neliniare, surse independente de curent sau tensiue şi surse comandate liniar să aibă soluţie şi aceasta să fie unică, pentru orice valori ale parametrilor au fost evidenţiate de Nishi şi Chua.

Teorema 3 poate fi extinsă cu uşurinţă în cazul regimului armonic sau la circu-

ite liniare în regim periodic permanent, cazuri în care se impune ca impedanţele complexe ale laturilor pasive să aibă parte reală strict pozitivă. Trebuie menţionat faptul că circuitele L-C serie au la rezonanţă impedanţă nulă, deci sunt similare surselor ideale de tensiune pasivizate, iar circuitelel L-C paralel au la rezonanţă admitanţă nulă, fiind similare surselor ideale de curent pasivizate. În particular, circuitul format dintr-o bobină ideală si un condensator ideal interconectate nu au soluţie unică, deoarece nici intensitateacurentului, nici tensiunea la bornele comune nu au valori univoc determinate din ecuaţiile circuitului.

Teorema 5, de existenţă şi unicitate în regim tranzitoriu a soluţiei unui circuit liniar alcătuit din rezistoare cu rezistenţe pozitive, condensatoare cu capacitate pozitivă, bobine eventual cuplate (cu matricea inductivităţilor simetrică şi pozitiv definită), surse ideale de tensiune şi surse ideale de curent: dacă există un arbore, care conţine toate sursele ideale de tensiune şi nici o sursă de curent, atunci pentru valori date la momentul iniţial ale tensiunilor la bornele condensatoarelor şi ale intensilăţilor curenîlor din bobine există o soluţie a ecuaţilor circuitului şi aceasta este unica.

Demonstraţia unicităţii se bazează pe teorema lui Tellegen. În general, pentru un circuit arbitrar, care satisface condiţiile teoremei 5 soluţia datoratş unor surse cu variaţie arbitrară în timp se află în clasa funcţiilor generalizate, ea fiind o distribuţie. Totuşi, în condiţii topologice suplimentare, referitoare la elementele acumulatoare de energie (absenţa buclelor formate din surse ideale de tensiune şi condensatoare sau a secţiunilor formate din surse ideale de curent şi bobine) soluţia satisface ecuaţiile diferenţiale ale circuitului în sens clasic, fiind continuă şi derivabilă. În această situaţie se spune că circuitul nu conţine elemente acumulatoare de energie în exces.

Exemplul 6. Circuitul din figura 17.13.a are soluţie clasică de regim tranzitoriu pentru $t >= 0$ şi aceasta este unică, dacă se cunosc R, L, C (strict pozitive), $j(t)$, $e(t)$ pentru $t >= 0$ şi condiţiile iniţiale $i(0)$ şi $u(0)$, deoarece el deţine un arbore normal, care conţine toate surselel de tensiune şi condensatoarele circuitului şi nici o sursă de curent sau bobină.

În schimb, circuitul din figura 17.13.b, cu toate că are soluţie unică, aceasta nu este în mod necesar o funcţie clasică (tensiunea la bornele condensatorului poate fi discontinuă, iar intensitatea curentului din condensator poate evolua în timp ca o funcţie de tip Dirac $\delta(t)$, deci nemărginită), deoarece circuitul conţine o buclă formată dintr-o sursă ideală de tensiune şi un condensator. Un efect similar are loc şi la conectarea în paralel a două condensatoare ideale, din care unul iniţial încărcat şi altul descărcat.

6.3 Teorema privind invarianţa soluţiei

Această categorie de teoreme evidenţiază transformările la care poate fi supus un circuit electric fără ca soluţia sa sau o parte a ei să se modifice.

Teorema 6, a surselor de tensiune cu acţiune nulă: dacă în ramurile unui circuit se înseriază surse ideale de tensiune arbitrare, iar în coardele sale se inseriază surse ideale de tensiune, care împreună cu cele din ramuri satisfac a doua relaţie a lui Kirchhoff, atunci intensităţile curenţilor din laturile circuitului nu se modifică.

Demonstraţia acestei teoreme se bazeaza pe observaţia că suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale surselor noi introduse este nulă pe orice buclă din circuit. În consecină, ecuaţiile Kirchhoff exprimate în curenţi nu se vor modifica în urma introducerii surselor menţionate.

Exemplul 7. Circuitul din figura 17.14.a are aceleaşi valori ale intensităîi curenţilor ca şi circuitul din figura 17.14.b, pentru orice valori e_1, e_2, e_3.

Teorema 7, a surselor de curent cu acţiune nulă: dacă în paralel cu coardele unui circuit se conectează surse de curent de valoare arbitrară, iar în paralel cu ramurile se conectează surse de curent, care împreună cu cele din coarde satisfac prima relaţie a lui Kirchhoff, atunci tensiunile la bornele laturilor circuitului nu se modifică.

Demonstraţia teoremei 7 este similară cu cea a teoremei 6, dar se referă la ecuaţiile Kirchhoff pentru tensiuni, care în acest caz rămân nemodificate.

O consecinţă imediată a teoremei 6 este că dacă pe toate laturile unui circuit, care concură la un nod, se înseriază surse ideale de tensiune cu valoare egală şi orientate similar faţă de nod, atunci intensităţile curenţilor din laturile circuitului nu se modifică (fig.17.15.a). Se constată că potenţialul nodului creşte cu E, ceea ce face ca tensiunile la bornele laturilor să fie afectate de introducerea noilor surse, în schimb curenţii din laturi îşi menţin intensităţile, deoarece pentru orice buclă care trece prin nod, cei doi termeni opuşi $+E$ şi $-E$ se anulează reciproc în a doua teoremă a lui Kirchhoff.

Din teorema 7 rezultă că dacă în paralel cu toate laturile unei bucle se conectează surse ideale de curent cu valoare egală şi orientate similar faţa de sensul buclei (v. fig. 17.15.b), atunci tensiunile la bornele laturilor circuitului nu se modifică. Aceste afirmaţii sunt cunoscute sub numele de **teoremele lui Vaschy**.

Utilizarea teoremelor Vaschy permite în unele cazuri simplificarea analizei circuitelor electrice.

Exemplul 8. Dacă la circuitul din figura 17.16.a se introduc surse de tensiune alese astfel încât să anuleze sursele iniţiale (v.fig.17.16.b) se obţine în final un circuit cu o singură sursă de tensiune (v.fig.17.16.c), care este străbătut de aceeaşi curenţi ca şi circuitul iniţial.

Folosind teoremele lui Vaschy pot fi eliminate dintr-un circuit bine formulat toate sursele ideale de tensiunesau curent, obţinându-se doar laturi cu surse reale (v.fig.17.17). Acestă transformare simplifică analiza circuitului, deoarece micşorează numărul de noduri respectiv de laturi.

Teoema 8, a echivalanţei: Orice parte a unui circuit electric poate fi înlocuită cu un multipol echivalent, fără ca partea de soluţie corespunzătoare restului circuitului să se modifice. La aplicarea acestei teoreme în regim tranzitoriu trebuie

avut grijă ca multipolul echivalent să asigure aceleaşi condiţii iniţiale (de obicei nule) ca şi partea de circuit satisfăcută. Aplicarea teoremei echivalenţei determină o tehnică eficientă de analiză a circuitelor electrice.

Exemplul 9. Prin înlocuirea dipolului AB din figura 17.18.a cu generatorul Thevenin echivalent, se obţine un circuit mult mai simplu (v.fig.17.18.b) în care intensităţile curenţilor I_1, I_2 şi I_3 au valori egale cu cele din circuitul iniţial.

Teorema 9, a substituţiei: Dacă într-un circuit electric un element dipolar cu tensiunea la borne $u(t)$ şi străbătut de curentul $i(t)$ este înlocuit cu o sursă ideală de tensiune cu valoarea $e(t) = u(t)$ sau cu o sursă ideală de curent cu valoarea $j(t) = i(t)$, atunci soluţia circuitului nu se modifică (v.fig.17.19).

Trebuie menţionat că prin substituţie este posibil ca un circuit cu soluţie unică să se transforme într-un circuit cu soluţii multiple. Modificarea unui circuit pe baza teoremei 9 este cunoscută sub numele de **transfigurare prin compensaţie**. Ea poate fi efectuată doar dacă se cunoaşte intensitatea curentului $i(t)$ sau tensiunea $u(t)$ la bornele elementului şi este valabilă doar pentru regimul respectiv. Din aceste motive se spune că transfigurarea prin compensaţie este mai slabă decât cea prin echivalenţă, evidenţiată de teorema 8.

Teorema 10, a simetriei pentru un circuit electric alcătuit din două părţi N'si N" identice: dacă cele două părţi sunt conectate simetric (v.fig.17.20.a), atunci intensităţile curenţilor prin conductoarele directe sunt nule ($i_1 = 0$, $i_2 = 0$, ...), iar tensiunile la bornele conductoarelor încrucişate sunt nule ($u_{34} = 0$, ...). Dacă cele două părî sunt conectate antisimetric (v.fig.17.21.a), atunci tensiunile între bornele simetrice conectate direct sunt nule (u_{14}, ...), iar curenţii prin bornele simetrice conectate încrucişat au intensităţi nule ($i_2 = 0$, $i_3 = 0$, ...).

Prin folosirea teoremei 10 analiza circuitelor simetrice se reduce considerabil, deoarece soluţia corespunzătoare părţii lui N'egală cu soluţia corespunzătoare părţii simetrice N" se poate obţine prin analiza doar a unei jumătăţi din circuit.

În cazul conexiunii simetrice (cu axă de simetrie), prin întreruperea conexiunilor directe şi scurtcircuitarea bornelor încrucişate, conform teoremei substituţiei, soluţia nu se modifică (v.fig.17.20.b). În cazul conexiunii antisimetrice (cu axă de răsturnare), soluţia nu se modifică prin scurtcircuitarea bornelor conectate direct şi prin întreruperea legăturilor încrucişate (v.fig.17.21.b).

Exemplul 10. Folosind teorema simetriei analiza circuitului simetric din figura 17.22.a se reduce la analiza circuitului din figura 17.22.b, iar analiza circuitului antisimetric din figura 17.23.b.

O altă transformare care nu modifică valorile numerice ale soluţiei ci doar substituie valorile tensiunilor cu ale curenţilor şi reciproc este transformarea de dualitate.

Un circuit N'este prin definiţie dualul unui circuit dat N, dacă ecuaţiile circuitului N în care s-au efectuat substituţiile $i'_k = u_k$ şi $u'_k = i_k$ sunt identice cu ecuaţiile circuitului N'.

Teorema 11, a dualităţii: condiţia necesară şi suficientă ca un circuit cu elemente dipolare să admită circuit dual este ca graful lui să fie planar.

Algoritmul de construcţie a circuitului dual Năl unui circuit dat N conţine etapele:

- se construieşte graful orientat G al circuitului N;
- în interiorul fiecărui ochi al grafului G şi în exteriorul grafului se plasează un nod al grafului G';
- prin unirea nodurilor (i') şi (j') se trasează câte o latură l'la graful G', asociată laturii l, comun ochiurilor [i] şi [j] din graful G;
- se orientează laturile lăle grafului G', astfel încât nodul de plecare al laturii lşă vadă latura duală l orientată în sens trigonometric;
- se introduce în fiecare latură l'un element dual elementului din latura corespunzătoare l, conform tabelului 17.1

Elemente duale	
Graful G	Graful G'
rezistor liniar cu rezistenţa R	rezistor liniar cu conductanţă G' numeric egală cu R
rezistor neliniar cu funcţia caracteristică u = f(i)	rezistor neliniar cu funcţia caracteristică $i' = f(u')$
bobină cu inductivitatea L	condensator cu cpacitatea C' numeric egală cu L
condensator cu cpacitatea C	bobină cu inductivitatea L' numeric egală cu C
sursă de tensiune e(t)	sursă de curent j'(t) numeric egal cu e(t)
sursă de curent j(t)	sursă de tensiune e'(t) numeric egal cu j(t)

Relaţia de dualitate permite extinderea rezultatelor obţinute în analiza şi sinteza unei categorii de circuite asupra categoriei duale.

Exemplul 11. Circuitul reprezentat în figura 17.24.a are o comportare similară a soluţiei cu circuitul din figura 17.24.c, respectiv asigură o relaţie $u - j$ similară celei $i - e$, realizată de pimul circuit. În figura 17.24.b se reprezintă cele două grafuri G şi G', duale unul altuia.

6.4 Teoreme privind comportarea soluţiei

Această categorie de teoreme evidenţiază proprietăţile soluţiilor circuitelor electrice.

Teorema 12, a superpoziţiei: la un circuit electric liniar şi cu condiţii iniţiale nule, dacă sub acţiunea surselor descrise de vectorul $S' = [e'_1, e'_2, \ldots, e'_l, j'_1, j'_2, \ldots, j'_l]^T$ soluţia este $J' = [i'_1, i'_2, \ldots, i'_l, u'_1, u'_2, \ldots, u'_l]^T$, iar sub acţiunea surselor $S'' = [e''_1, e''_2, \ldots, e''_l, j''_1, j''_2, \ldots, j''_l]^T$ soluţia este $J'' = [i''_1, i''_2, \ldots, i''_l, u''_1, u''_2, \ldots, u''_l]^T$, atunci sub acţiunea surselor $\lambda_1 S' + \lambda_2 s''$ soluţia este $\lambda_1 J' + \lambda_2 J''$, în care λ_1 şi λ_2 sunt constante reale.

Teorema superpoziţiei este o consecinţă imediată a liniarităţiiecuaţiilor circuitelor electrice liniare, cu sau fără surse comandate liniar. În cazul regimurilor staţionare sau periodic permanente, deci inclusiv în cazul regimului armonic, restricţia referitoare la condiţiile iniţiale nu trebuie luată în considerare.

În regim tranzitoriu, superpoziţia pote fi aplicată şi condiţiilor ini;tiale, dacă acestea sunt tratate ca surse, conform echivalenţei reprezentate în figura 17.25. În consecinţă, soluţia de regim tranzitoriu a unui circuit electric liniar cu condiţii iniţiale nenule se poate descompunr întotdeauna într-o soluţie de regim liber (obţinută prin pasivizarea surselor din circuitul iniţial dar cu considerarea condiţiilor inţiale nenule).

Ca o consecinţă a teoremei superpoziţiei rezultă fapctul că soluţia unui ciecuit liniar este egală cu suma soluţiilor circuitului respectiv, în condiţiile în care se intreduce pe rând în circuit câte o sursă iar celelalte sunt pasivizate (v.fig.17.27).

Operaţia de pasivizare a unei surse constă în anularea parametrului ei. În cazul unei surse ideale de tensiune ($u = e$), aceasta corespunde cu înlocuirea ei cu un conductor perfect, iar în cazul unei surse ideale de curent($i = j$), pasivizarea corespunde cu înlocuirea cu un izolator perfect. În general, pasivizarea unei surse independente corespunde înlocuirii cu rezistenţa sa internă (nulă la sursa ideală de tensiune şi infinită la sursa ideală de curent).

Sursele comandate şi rezistoarele nu sunt modificate prin operaţia de pasivizare.

O altă consecinţă, cunoscută sub numele de **teorema liniarităţii**, rezultă prin aplicarea teoremei superpoziţiei la circuitele cu o singură sursă de tensiune (v.fig.17.28.a) sau de curent (v.fig.17.28.b). În acest caz soluţia depinde liniar de parametrul sursei. Dacă circuitul este rezistiv sau de regim staţionar, dependenţa dintre soluţie şi parametrul sursei se exprimă ca o relaţie de proporţionalitate:

$$i_k = g_{km} \cdot e_m, \ u_k = \alpha_{km} \cdot e_m, \tag{6.8}$$

în cazul sursei de teniune plasată în latura m şi

$$i_k = \beta_{km} \cdot j_m, \ u_k = r_{km} \cdot j_m, \tag{6.9}$$

în cazul sursei de curent plasată în latura m.

Aceste relaţii permit determinarea funcţiilor de circuit:

- g_{km} - conductanţa de transfer;
- α_{km} - factorul de transfer pentru tensiune

- β_{km} - factorul de transfer pentru curent;
- r_{km} - rezistanţa de transfer;

care sunt numere reale independente de parametrul sursei şi ale căror valori depind doar de circuit şi de laturile k, m considerate.

În cazul regimului variabil al circuitelor cu elemente acumulatoare de energie, între parametrii surselor (excitaţiile e_m, j_m) şi soluţia (răspunsul u_k, i_k) există relaţii de liniaritate dar nu şi de proporţionalitate instantanee. De aceea, funcţiile de circuit se exprimă în acest caz prin operatori liniari. Folosind transformări simbolice (reprezentarea complexă în cazul regimului armonic, transformata Fourier în cazul regimului periodicpermanent şi transformata Laplace în regim tranzitoriu) aceşti operatori se exprimă prin funcţii complexe numita admitanţă de transfer, factor complex de transfer pentru curent sau tensiune şi respectiv impedanţă de transfer.

Revanind la cazul circuitelor liniare rezistive se demonstrează că în absenţa surselor comandate, factorii de transfer au valori subunitare $|\alpha_{km}| \leq 1$, $|\beta_{km}| \leq 1$, ceea ce asigură în întregul circuit tensiuni şi curenţi mai mici sau cel mult egali cu tensiunea sau curentul produs de sursă. Această afirmaţie nu este adevărată în cazul circuitelor cu surse comandate (în car poate apare efectul de amplificare) şi nici în cazul circuitelor în regim variabil (în care pot apare efecte de rezonanţă).

Teorema 13, a reciprocităţii: într-un circuit electric liniar, alcătuit din elemente dipolare pasive (rezistoare, condensatoare şi eventual bobine cuplate magnetic, caracterizate prin matrice ale inductivităţilor simetrice), operatorii impedanţă şi admitanţă de transfer sunt identici; în particular, cazul circuitelor rezistive, rezistenţele şi conductanţle de transfer sunt simetrice, adică

$$r_{km} = r_{mk}, \quad g_{km} = g_{mk}, \tag{6.10}$$

Demonstraţia acestei teoreme se bazează pe teorema Tellegen.

Teoarema 13 nu poate fi aplicată în cazul circuitelor cu surse comandate (care din acest metiv se numesc surse nereciproce), în cazul circuitelor active (care conţin surse sau condiţii iniţiale nenule) şi nici în cazul circuitelor neliniare. Circuitele la care se aplică teorema 13 se numesc reciproace, iar celelalte sunt nereciproace.

Un exemplu tipic de circuit nereciproc este amplificatorul, la care efectul semnalului asupra ieşirii este complet diferit de efectul invers al răspunsului asupra intrării.

Conform acestei teoreme, intensitatea curentului i'_k prin poarta de ieşire a unui circuit cuadripol reciproc, în condiţiile în care poarta de intrare este excitată de sursa de tensiune $e'_m = e$ este egală cu intensitatea curentului din poarta de intrare $i"_m$, în condiţiile în care poarta de ieşire este excitată de sursa de tensiune $e"_k = e$ (v.fig.17.30), caz în care $u'_k = u"_m$.

Teorema liniarităţii aplictă circuitelor rezistive asigură admiterea dependenţei dintresemnalu de intrare şi cel de ieşire. Deci, mici variaţii ale semnalului de intrare determină în cazul circuitelor rezistive liniare bine formulate, variaţii suficient de mici ale semnalului de ieşire. Această comportare a soluţiei nu este caracteristică tuturor circuitelor electrice. De exemplu, în cazul unor circuite neliniare (v.fig.17.31) mici variaţii ale semnalului de intrare pot determina variaţii importante ale semnalului de ieşire, iar în cazul regimului tranzitoriu excitaţii mici sau chiar nule pot determina răspunsuri ale căror valori cresc namărginit în timp (v.fig.17.32). Astfel de comportări instabile se pot întâlni şi în funcţionarea circuitelor electrice reale, motiv pentru care este utilă cunoaşterea condiţiilor în care soluţia unui circuit este stabilă, ceea ce înseamnă că ea este dependentă continuu de datele problemei (excitaţii, condiţii iniţiale, parametrii elementelor).

Teorema 14, de stabilitate: un circuit electric liniar, alcătuit din elemente dipolare pasive ($R_k > 0$, $L_k > 0$,$C_k > 0$), din surse ideale de tensiune sau curent şi care se află în condiţiile iniţiale (la $t = 0$) nenule, are soluţia $i_k(t)$, $u_k(t)$, $t \geq 0$, dependentă continuu de datele problemei, dacă el nu conţine surse sau elemente acumulatoare de energie în exces.

Este un concept de stabilitate mai puţin uzual, ar trebui continuată prezentarea legând-o de ceea ce s-a menţionat prea în fugă în legătură cu figura 17.32.

Anexa A

Legile câmpului electromagnetic

A.1 Legea fluxului electric.

Fluxul electric pe orice suprafaţă inchisă Σ este egal cu sarcina electrică din domeniul D_Σ marginit de suprafaţa Σ :

$$\psi_\Sigma = q_{D_\Sigma}, \tag{A.1}$$

sau dezvoltat:

$$\int_\Sigma \mathbf{D}d\mathbf{A} = \int_{D_\Sigma} \rho dv. \tag{A.2}$$

Aceată lege caracterizează fenomenul prin care orice corp electrizat produce în interiorul şi în jurul să un câmp electric.

Aplicând relaţia Gauss-Ostrogradski, rezultă:

$$\int_\Sigma \mathbf{D}d\mathbf{A} = \int_{D_\Sigma} div\mathbf{D}dv = \int_{D_\Sigma} \rho dv.$$

Ultima relaţie fiind valabilă pentru orice domeniu D_Σ rezultă că:

$$div\mathbf{D} = \rho. \tag{A.3}$$

Această consecinţă diferenţială este cunoscută sub numele de forma locală a legii fluxului electric.

A.2 Legea fluxului magnetic.

Fluxul magnetic pe orice suprafaţă închisă Σ este nul:

$$\varphi_\Sigma = 0, \tag{A.4}$$

sau dezvoltat:

$$\int_\Sigma \mathbf{B}d\mathbf{A} = 0. \tag{A.5}$$

Această lege evidenţiază absenţa sarcinii magnetice. Folosind Gauss-Ostrogradski, rezultă forma locală a legii câmpului magnetic:

$$div\mathbf{B} = 0. \tag{A.6}$$

A.3 Legea inducţiei electromagnetice

Tensiunea elecctrică pe orice curbă închisă Γ este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic de pe orice suprafaţă S_Γ, care se sprijină pe curba Γ:

$$u_\Gamma = -\frac{d\varphi_{S_\Gamma}}{dt}, \tag{A.7}$$

sau dezvoltat:

$$\int_\Gamma \mathbf{E}d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma} \mathbf{B}d\mathbf{A}. \tag{A.8}$$

Această lege se referă la fenomenul de inducţie electromagnetică, prin care orice câmp magnetic variabil generează (induce) un câmp electric.

În teoria Maxwell-Hertz, curba Γ şi suprafaţa S_Γ sunt antrenate de corpuri în mişcarea lor. Dacă acestea sunt imobile prin aplicarea relaţiei lui Stokes, rezultă:

$$\int_\Gamma \mathbf{E}d\mathbf{r} = \int_{S_\Gamma} rot\mathbf{E}d\mathbf{A} = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}d\mathbf{A}.$$

Deoarce ultima egalitate este valabilă pentru orice suprafaţă S_Γ, rezultă că:

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{A.9}$$

care este forma locală a legii inducţiei electromagnetice în medii imobile.

În regim staţionar, mărimile fizice sunt constante în timp, iar legea inducţiei devine:

$$\int_\Gamma \mathbf{E}d\mathbf{r} = 0. \tag{A.10}$$

În acest regim tensiunea electrică pe orice curbă închisă este nulă. Această relaţie este cunoscută sub numele de teorema potenţialului electric staţionar. Forma locală a acestei teoreme:

$$rot\mathbf{E} = 0 \tag{A.11}$$

evidenţiază caracterul irotaţional al intensităţii câmpului electric în regim staţionar.

O consecinţă directă a teoremei potenţialului electric staţionar este aceea că tensiunea electrică staţionară pe o curbă deschisă nu depinde de forma curbei ci doar de punctele ei extreme:

$$\int_{\Gamma=C_1UC_2} \mathbf{E}d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{E}d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{E}d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{E}d\mathbf{r}_1 - \int_{C_2} \mathbf{E}d\mathbf{r}_2 = U_1 - U_2 = 0$$

Deci $U_1 = U_2$, în care U_1 şi U_2 sunt tensiunile între două puncte A şi B calculate pe două drumuri diferite. În consecinţă, tensiunea electrică este în regim staţionar o mărime asociaă unei perechi orientate de puncte şi nu unei curbe. Acestă observaţie permite caracterizarea locală a câmpului electric printr-o mărime scalară numită potenţial şi definită ca tensiunea de la punctul curent la un punct de referinţă, în care potenţialul se consideră convenţional nul:

$$V(M) = \int_{C_{M\,M_o}} \mathbf{E}d\mathbf{r} = U_{M\,M_o}. \tag{A.12}$$

Utilizarea potenţialului simplifică determinarea tensiunii electrice staţionare:

$$U_{AB} = \int_{C_{AB}} \mathbf{E}d\mathbf{r} = \int_{C_{AM_0}} \mathbf{E}d\mathbf{r} + \int_{C_{M_0B}} \mathbf{E}d\mathbf{r} = V_A - V_B. \tag{A.13}$$

În regim staţionar tensiunea electrică între două puncte este potenţialul punctului iniţial minus potenţialul punctului final.

Cunoaşterea potenţialului electric permite determinarea intensităţii câmpului electric prin relaţia:

$$\mathbf{E} = -gradV, \tag{A.14}$$

în concordanţă cu caracterul irotaţional al intensităţii câmpului electric în acest regim.

Pentru demonstrarea acestei relaţii se consideră:

$$U_{AB} = \int_{C_{AB}} \mathbf{E}d\mathbf{r} = -\int_{C_{AB}} gradV d\mathbf{r} = -\int_{C_{AB}} dV = V_A - V_B,$$

relaţie în acord cu A.13.

A.4 Legea circuitului magnetic.

Tensiunea magnetică pe orice curbă închisă Γ este egală cu intensitatea curentului electric plus viteza de variaţie a fluxului electric de pe suprafaţa S_Γ, care se aprijină pe curba Γ:

$$u_{m_\Gamma} = i_{S_\Gamma} + \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt}, \tag{A.15}$$

sau dezvoltat:

$$\int_\Gamma \mathbf{H}d\mathbf{r} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J}d\mathbf{A} + \frac{d}{dt}\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}d\mathbf{A} \tag{A.16}$$

Legea cicuitului magnetic pune în evidenţă două cauze ale câmpului magnetic şi anume:

- curentul electric;
- variaţia în timp a câmpului electric.

Deoarece $\frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt}$ are aceiaşi unitate de măsură cu i_{S_Γ} şi acelaşi efect magnetic el a fost numit de Maxwell curent deplasare.

În teoria Maxwell-Hertz atât curba Γ cât şi suprafaţa S_Γ se consideră antrenate de corpuri în mişcarea lor. În continuare se va presupune corpurile imobile şi prin aplicarea relaţiei Stokes, rezultă:

$$\int_\Gamma \mathbf{H} d\mathbf{r} = \int_{S_\Gamma} rot\mathbf{H} d\mathbf{A} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J} d\mathbf{A} + \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{A}.$$

Ultima egalitate este valabilă pentru orice suprafaţă S_Γ şi în consecinţă:

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{A.17}$$

Acestă consecinţă diferenţială a legii este cunoscută sub numele de forma locală a legii cicuitului magnetic în medii imobile. Rotorul intensităţii câmpului magnetic este dat de suma dintre densitatea de curent de conducţie şi cea de deplasare.

În regim staţionar legea circuitului magnetic are una din formele:

$$u_{m_\Gamma} = i_{S_\Gamma}; \tag{A.18}$$

$$\int_\Gamma \mathbf{H} d\mathbf{r} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J} d\mathbf{A}; \tag{A.19}$$

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J}. \tag{A.20}$$

cunoscute sub numele de teorema lui Ampére.

A.5 Teorema conservării sarcinii electrice.

Intensitatea curentului electric ce părăseşte o suprafaţă închisă Σ este egală cu viteza de scădere a sarcinii din domeniul D_Σ mărginit de suprafaţa Σ:

$$i_\Sigma = -\frac{dq_{D_\Sigma}}{dt}, \tag{A.21}$$

sau dezvoltat:

$$\int_\Sigma \mathbf{J} d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \int_{D_\Sigma} \rho dv. \tag{A.22}$$

Legea conservării sarcinii electrice evidenţiază legătura intimă care există între curentul electric şi sarcina electrică, fiind în concordanţă cu interpretarea microscopică a curentului ca deplasare ordonată a sarcinilor electrice.

Legea conservării sarcinii electrice poate fi privită ca o consecinţă a legii circuitului magnetic. Dacă vom considera curba Γ un cerc a cărui rază tinde către 0, suprafaţa S_Γ va tinde către o suprafaţă închisă Σ iar din relaţia (A.15):

$$u_{m_\Gamma} = i_{S_\Gamma} + \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt}$$

se obţine prin trecerea la limită:

$$0 = i_\Sigma + \frac{d\psi_\Sigma}{dt}.$$

Deoarece conform legii fluxului electric $\psi_\Sigma = q_{D_\Sigma}$, rezultă că $i_\Sigma = -\frac{dq_{D_\Sigma}}{dt}$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

Forma locală a acestei legi pentru medii imobile de obţine aplicând realţia Gauss-Ostrogradski,

$$\int_\Sigma \mathbf{J} d\mathbf{A} = \int_{D_\Sigma} div\mathbf{J} dv = -\int_{D_\Sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv.$$

Deoarece ultima egalitate se menţine valabilă pentru orice domeniu D_Σ, rezultă că:

$$div\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{A.23}$$

care este forma locală a legii.

În cazul regimului staţionar, legea conservării sarcinii capătă una din formele:

$$i_\Sigma = 0, \tag{A.24}$$

$$div\mathbf{J} = 0. \tag{A.25}$$

cunoscute sub numele de teorema conservării curentului.

A.6 Legea legăturii dintre D şi E.

Inducţia electrică **D** dintr-un punct depinde de intensitatea câmpului electric din acel punct.

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$$

Modul concret de dependinţă este funcţie de natura substanţei în care se află punctul curent. Din acest motiv legea legăturii $\mathbf{D} - \mathbf{E}$ este o lege de material.

În cazul vidului între **D** şi **E** există o dependenţă de proporţionalitate şi coliniaritate:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \tag{A.26}$$

în care ε_0 este o constantă universală, numită permitivitatea vidului şi care are valoarea $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi 9.1 \cdot 10^9}$ F/m. În majoriatea corpurilor, legătura dintre **D** şi **E** este tot de coliniaritate şi proporţionalitate:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \tag{A.27}$$

dar ε este în acest caz o constantă de material, numită permitivitate. Mediile în care $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ se numesc dielectrici liniari şi izotropi.

Dacă dependinţa între **D** şi **E** nu este de proporţionalitate atunci mediile sunt dielectrici neliniari. În acest caz, dependinţa poate fi aproximată măcar pe porţiuni prin relaţia:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P_p} \tag{A.28}$$

în care $\mathbf{P_p}$ este o constantă de material numită polarizaţie permanentă. Această formă a legii evidenţiază o altă cauză posibilă a câmpului electric şi anume polarizaţia permanentă (cazul electreţilor).

Pornind de la forma locală a legii dependenţei $\mathbf{D} - \mathbf{E}$ în dielectrici liniari se poate obţine o consecinţa integrală, referitoare la tuburile de flux electric. Un tub de flux electric este un domeniu spaţial D_Σ neelectrizat, mărginit de suprafaţa închisă $\Sigma = S_l + S_1 + S_2$ alcătuită din suprafaţa laterală S_l pe care fluxul este nul pentru că $\mathbf{nD} = 0$ şi cele două suprafeţe S_1 şi S_2 sunt numite borne, pe care $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$.

Starea electrică a unui tub de flux este caracterizată prin:

- fluxul electric:

  $$\psi = \int_S \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int_{S_1} \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int_{S_2} \mathbf{D} d\mathbf{A},$$

  care are aceiaşi valoare pe orice transversală conform legii fluxului electric.

- tensiunea electrică:

  $$U = \int_{C_{12}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = V_1 - V_2,$$

  calculată pe o curbă care uneşte un punct de pe prima bornă cu un punct de pe a doua bornă. Datorită condiţiilor impuse celor două borne acestea vor avea un caracter echipotenţial: $V|_{S_1} = V_1$, $V|_{S_2} = V_2$

Ca o consecinţă locală a legii legăturii $\mathbf{D} - \mathbf{E}$, rezultă teorema tubului liniar de flux electric, care afirmă că fluxul electric al tubului este proporţional cu tensiunea electrică:

$$\psi = \Lambda_e U,$$

costanta de proporţionalitate Λ_e este numită permeanţă electrică a tubului de flux nu depinde de starea electrică ci doar de datele geometrice şi de material. Inversa permeanţei electrice

$$C = \frac{1}{\Lambda_e}$$

poartă numele de capacitatea tubului de flux.

Demonstraţia acestei teoreme se bazează pe liniaritatea dependenţelor $U - \mathbf{E}$,$\psi - \mathbf{D}$ şi $\mathbf{D} - \mathbf{E}$, care fiind tranzitorie implică liniaritatea dependenţei $\psi - U$.

A.7 Legea legăturii dintre B şi H.

Inducţia magnetică **B** dintr-un punct depinde de intensitatea câmpului magnetic din acel punct.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}\left(\mathbf{H}\right). \tag{A.29}$$

Modul concret de dependenţă este funcţie de natura substanţei în care se află punctul curent. Şi legea legăturii $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ este o lege de material.

În cazul vidului, între **B** şi **H**, dependenţa este dată de proporţionalitate şi coliniaritate:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \tag{A.30}$$

constanta de proporţionalitate $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$H/m fiind o constantă universală, numită permeabilitatea vidului.

În multe corpuri numite medii liniare şi izotrope din punct de vedere magnetic dependenţa $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ este dată de relaţia de proporţionalitate şi coliniaritate:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \tag{A.31}$$

în care μ este o constantă de material numită permeabilitate.

În medii neliniare magnetic dependenţa $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ este mai complicată, dar poate fi aproximată pe porţiuni prin relaţia:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M_p} \tag{A.32}$$

în care $\mathbf{M_p}$ este o constantă de material numită magnetizaţie permanentă. Acesta formă a legii evidenţiază drept sursă posibilă a câmpului magnetic magnetizaţia permanentă (cazul magneţilor permanenţi).

Pentru a stabili consecinţele integrale ale legii dependenţei $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ se consideră un tub de flux magnetic în regim staţionar, definit pe un domeniu D_Σ, mărginit de suprafaţa $\Sigma = S_l U S_1 U S_2$ cu propietatea că pe suprafaţa laterală S_l este îndeplinită condiţia $\mathbf{Bn} = 0$ iar pe bornele S_1 şi S_2: $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0$.

Dacă tubul de flux magnetic este ocupat de un mediu magnetic liniar nestrăbătut de curent electric atunci ele este carcaterizat de mărimile globale:

- fluxul magnetic:

$$\varphi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{A} = \int_{S_1} \mathbf{B} d\mathbf{A} = \int_{S_2} \mathbf{B} d\mathbf{A},$$

  calculat pe o secţiune transversală şi

- tensiunea magnetică:

$$U_m = \int_{C_{12}} \mathbf{H} d\mathbf{r},$$

  calculată pe o curbă ce uneşte cele două borne (în ipotezele menţionate se demonstrează uşor că acesată mărime nu depinde de forma curbei sau de

poziţia punctelor externe cu condiţia ca acestea să fie plasate pe cele două borne). În ipotezele menţionate între aceste mărimi globale există relaţia de proporţionalitate:

$$\varphi = \Lambda_m U_m.$$

Constanta de proporţionalitate Λ_m numită permeanţă magnetică a tubului de flux nu depinde de starea magnetică a tubului ci doar de datele geometrice şi de material. Inversa permeanţei

$$R_m = \frac{1}{\Lambda_m}$$

se numeşte reluctanţă magnetică şi este o constantă caracteristică a tubului de flux magnetic.

Demonstraţia teormei tubului de flux magnetic se bazează pe liniaritatea dependenţelor $\varphi - \mathbf{B}$, $U_m - \mathbf{H}$ şi $\mathbf{B} - \mathbf{H}$.

A.8 Legea conducţiei.

Densitatea curentului electric $\mathbf{J}$ dintr-un punct depinde de intensitatea câmpului electric din acel punct:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}\left(\mathbf{E}\right). \tag{A.33}$$

Modul concret al dependinţei este funcţie de natura substanţei în care se află punctul respectiv. Legea conducţiei cunoscută şi sub numele de legea lui Ohm sau legea legăturii $\mathbf{J} - \mathbf{E}$ este o lege de material.

În majoritatea corpurilor $\mathbf{J}$ este proporţional şi coliniar cu $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \tag{A.34}$$

Mediile în care este valabila relaţia A.34 se numesc conductoare liniare. Constanta de material σ se numeşte conductivitate electrică iar inversa ei

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

se numeşte rezistivitate. În cazul vidului deoarece acesta nu poate fi străbătut de curent electric: $\mathbf{J} = 0$ ceea ce corespunde condiţiei $\sigma = 0$. Mediile prin care curentul electric nu poate trece şi la care $\sigma = 0$ se numesc izolatoare perfecte iar mediile la care $\rho = 0$, deci $E = 0$ oricare ar fi J se numesc supraconductoare.

Corpurile în care J nu este proporţional cu E se numesc conductoare neliniare. În acestea, cel puţin pe porţiuni, dependenţa $\mathbf{J} - \mathbf{E}$ poate fi aproximată cu relaţia:

$$\mathbf{J} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i\right), \tag{A.35}$$

în care $\mathbf{E}_i$ este o constantă vectorială de material numită intensitatea câmpului electric imprimat.

Pentru a stabili consecinţa integrală a legii conducţiei se consideră un domeniu D_Σ, numit tub de curent, în care $\mathbf{E}$ şi $\mathbf{J}$ sunt constante în timp iar supraftaţa de frontieră $\Sigma = S_l U S_1 U S_2$ este formată dintr-o suprafaţă laterală S_l pe care $\mathbf{nE} = 0$ şi două borne S_1 şi S_2 pe care $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$. Starea electrică a tubului de curent este caracterizată de:

- intensitatea curentului ce străbate tubul:

$$I = \int_S \mathbf{J}d\mathbf{A} = \int_{S_1} \mathbf{J}d\mathbf{A} = \int_{S_2} \mathbf{J}d\mathbf{A}$$

  calculat pe o secţiune transversală arbitrară şi

- tensiunea electrică între borne:

$$U = \int_{C_{12}} \mathbf{E}d\mathbf{r}$$

  calculată pe o curbă ce porneşte de pe un punct aparţinând primei borne şi se opreşte într-un punct al celei de-a doua borne.

În regim staţionar, conform teoremei conservării curentului, intensitatea I are aceiaşi valoare pe orice secţiune S. Conform teoremei potenţialului staţionar tensiunea U nu depinde de forma curbei C_{12}, şi nici de poziţia celor două puncte extreme în interiorul bornelor S_1 şi S_2, deoarece bornele sunt echipotenţiale conform condiţiei $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$.

Teorema tubului de curent liniar afirmă că în regim staţionar pe un tub de curent care ocupă un domeniu conductor liniar, intensitatea curentului este proporţională cu tensiunea:

$$I = GU. \tag{A.36}$$

Constanta de proporţionalitate G se numeşte conductanţa tubului de curent şi nu depinde nici de U nici de I ci doar de datele geometrice şi de cele de material.

Inversa conductanţei

$$R = \frac{1}{G} \tag{A.37}$$

se numeşte rezistenţa tubului de curent.

Demonstraţia acestei teoreme se bazează pe liniaritatea relaţiilor $I - \mathbf{J}$, $U - \mathbf{E}$ şi $\mathbf{J} - \mathbf{E}$.

O aplicaţie utilă a teoremei o reprezintă cazul unui conductor filiform (cu o lungime mult mai mare decât diametrul) scufundat într-un mediu izolant şi străbătut de longitudinal de curent electric.

Notând cu C_{12} linia mediană a conductorului, datorită caracterului filiform se poate presupune că pe orice secţiune transversală, normală la C_{12}, densitatea de

curent $\mathbf{J}$ este distribuită uniform şi tangenţial la C_{12}. Presupunând conductorul liniar ($\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$), rezultă că şi $\mathbf{E}$ are aceiaşi propietate. În consecinţă,

$$I = \int_S \mathbf{J}d\mathbf{A} = JA,$$

deci

$$=> J = \frac{I}{A},$$

în care A este aria secţiunii transversale în punctul curent.

$$U = \int_{C_{12}} \mathbf{E}d\mathbf{r} = \int_{C_{12}} Edr = \int_{C_{12}} \rho Jdr = I\int_{C_{12}} \frac{\rho dr}{A},$$

deci

$$R = \frac{U}{I} = \int_{C_{12}} \frac{\rho dr}{A}. \tag{A.38}$$

Dacă firul este omogen ($\rho = ct$) şi are aceeaşi arie în orice secţiune transversală (A=ct), atunci,

$$R = \frac{\rho l}{A} \tag{A.39}$$

unde l este lungimea firului.

În cazul în care firul conductor este neliniar din punct de vedere electrocinetic:

$$\mathbf{J} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i\right)$$

sau echivalent

$$\mathbf{E} = \rho\mathbf{J} - \mathbf{E}_i.$$

Tensiunea de-a lungul firului este:

$$U = \int_{C_{12}} \mathbf{E}d\mathbf{r} = \int_{C_{12}} \rho\mathbf{J}d\mathbf{r} - \int_{C_{12}} \mathbf{E}_i d\mathbf{r} = RI - e, \tag{A.40}$$

în care

$$e = \int_{C_{12}} \mathbf{E}_i d\mathbf{r} \tag{A.41}$$

se numeşte tensiune electromotoare a firului. Se constată că în acest caz ca tensiunea între borne nu mai este proporţională cu valoarea curentului deoarece în condiţiile în care $I = 0$ tensiunea la bornele conductorului $U = -e$ este nenulă.

A.9 Legea transformării energiei în conductoare.

Prezenţa curentului electric în conductoare determină transformări energetice, însoţite de încălzirea conductoarelor. Aceste transformări sunt descrise de legea enunţată în continuare.

Densitatea de volum a puterii puterii transferate de câmpul electromagnetic corpurilor este egală cu produsul scalar dintre densitatea de curent şi intensitatea câmpului electric.

$$p = \mathbf{J}\mathbf{E}. \tag{A.42}$$

Densitatea de volum a puterii p este o mărime scalară măsurată în W/m^3 ce caracterizează local viteza de transfer a energiei. Dacă $p > 0$, atunci transferul are loc de la câmp la corp iar dacă $p < 0$, atunci sensul real al transferului este invers.

În cazul conductoarelor liniare

$$p = \mathbf{J}\mathbf{E} = \sigma E^2 = \rho J^2 \geq 0, \tag{A.43}$$

deci transferul are loc ireversibil de la câmp la corp. Energia transferată duce la încălzirea conductorului, fenomenul purtând numele Joule-Lentz. În conductoare neliniare:

$$p = \mathbf{J}\mathbf{E} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i\right)\mathbf{E} = \sigma E^2 + \sigma \mathbf{E}\mathbf{E}_i = \rho J^2 - \mathbf{J}\mathbf{E}_i, \tag{A.44}$$

rezultatul fiind pozitiv sau negativ. În cazul în care $\mathbf{J}$ este orientat în sens invers faţă de $\mathbf{E}_i$ atunci $p > 0$ iar transferul energetic are sensul real de la câmp la corp. Dacă $\mathbf{J}$ este orientat în sensul $\mathbf{E}_i$ este posibil ca $p < 0$, ceea ce corespunde transferului de la corp la câmp. În ambele situaţii transferul este însoţit de fenomenul ireversibil Joule-Lentz ($\rho J^2 > 0$).

Forma globală a legii va fi stabilită pentru cazul conductoarelor filiforme:

$$P = \int_{D_\Sigma} p dv = \int_{C_{12}} \int_S \mathbf{J}\mathbf{E} dA dr = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{A} \int_{C_{12}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = UI, \tag{A.45}$$

la care puterea $P[W]$ transferată întregului conductor este egală cu produsul dintre tensiunea U şi intensitatea I. Acest rezultat este valabil pentru orice tub de curent.

În particular, în mediile conductoare liniare:

$$P = UI = RI^2 = GU^2, \tag{A.46}$$

iar în conductoare filiforme cu câmp imprimat:

$$P = UI = \left(RI - e\right)I = RI^2 - eI, \tag{A.47}$$

apare în afara puterii $P = RI^2$, disipate prin efect termic Joule-Lenz şi termenul eI, dependent de t.e.m. a conductorului.